E.-M. LÉMERAY

Sur la convergence des substitutions uniformes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 75-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__75_1>

[H11] [J4a]

SUR LA CONVERGENCE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Dans un article précédent (¹) j'ai étudié la convergence de la substitution

$$x, fx$$

(¹) *Voir* p. 306; 1897.

vers une racine a de l'équation $fx - x = 0$, quand la fonction donnée fx est holomorphe dans le voisinage du point a, et quand la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ prend en ce point une valeur dont le module est 1, et l'argument $\frac{2k\pi}{n}$, k étant plus petit que n et premier avec lui. J'ai montré qu'alors les n premières dérivées de la différence $f^n x - x$ sont nulles pour $x = a$ et que, en supposant la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de cette même différence non égale à o pour $x = a$, il existe, dans un cercle infiniment petit décrit autour du point a, n secteurs de convergence et n secteurs de divergence pour la substitution proposée; ces secteurs ont tous même amplitude et alternent entre eux.

Considérons, à présent, le cas où la première dérivée de la différence $f^n x - x$, qui ne s'annule pas en a, est d'ordre $m+1$, m étant nécessairement plus grand que n; les m premières dérivées de $f^n x - x$ étant des fonctions que l'on sait former des m premières dérivées de $fx - x$, le fait se produira s'il existe entre ces dernières certaines relations convenables. Considérons la fonction $y_n = f^n x$; comme elle peut se mettre sous la forme

$$y_n - a = x - a + \frac{A_{m+1}}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} + \ldots,$$

nous pourrons répéter les raisonnements de notre première étude et nous trouverons, autour du point a, non plus n, mais m secteurs de convergence pour la substitution $x, f^n x$; pour obtenir ceux de la substitution proposée, il suffit de remarquer que, lorsque, à une distance très petite de a, on passe de la fonction $f^p x$ à la fonction $f^{p+1} x$, l'argument de la dérivée de la dernière diffère très peu de celui de la dérivée de la première augmenté de $\frac{2k\pi}{n}$. Pour obtenir les secteurs de convergence de x, fx, on fera tourner ceux de $x, f^n x$, dans le sens négatif, d'un angle égal à $\frac{2(n-1)k\pi}{n}$. Pour que les secteurs de convergence d'une substitution $x, f^q x$ soient les mêmes que ceux de $x, f^n x$, il faut et il suffit que l'angle $\frac{2(n-q)k\pi}{n}$ soit un multiple de $\frac{2k\pi}{m}$; c'est-à-dire

$$mq \equiv 0 \pmod n.$$

Si n et m étaient premiers entre eux, un secteur de convergence pour une substitution ne le serait, du moins dans sa totalité, pour aucune autre. Si n et m admettaient un plus grand diviseur commun d, la valeur $\frac{n}{d}$ de q satisferait à la condition ci-dessus, et les secteurs de convergence pour $x, f^n x$ le seraient aussi pour les substitutions

$$x, \quad f^{i\frac{n}{d}} x \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

mais pour celles-là seulement.

Or les deux dernières hypothèses sont inadmissibles et m est toujours multiple de n. En effet, considérons la suite des diverses itératives

$$x, \quad fx, \quad f^2 x, \quad \ldots;$$

pour une valeur donnée de x, ou il y a convergence, ou il y a divergence (écartons le cas où après n itérations on retomberait exactement sur la valeur initiale). Supposons, par exemple, le cas de la convergence, et considérons la suite des itératives

$$x, \quad f^p x, \quad f^{2p} x, \quad \ldots;$$

en partant de la même valeur x que tout à l'heure, nous aurons convergence puisque ces itératives appartiennent elles-mêmes à la première suite; il est donc impossible d'admettre qu'un secteur de convergence pour une substitution ne le soit pas dans sa totalité pour une autre quelconque; m est donc toujours multiple de n, on est ainsi amené à ce théorème :

Soit a un point-racine de l'équation $fx - x = 0$, fx étant holomorphe dans le voisinage de a; désignons par f^n la $n^{ième}$ itérative de fx, par p un multiple de n, par $a_1, a_2, \ldots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de fx par rapport à x; par $A_1, A_2, \ldots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de $f^n x - x$ par rapport à la même variable, et supposons qu'il existe entre les a_i des relations telles que les p quantités $A_1, A_2, \ldots, A_p$ soient nulles; cela posé, si l'on assujettit les a_i à satisfaire à une nouvelle condition choisie de telle sorte que l'on ait $A_{p+1} = 0$, on a aussi $A_{p+2} = 0$, $A_{p+3} = 0, \ldots, A_{p+n} = 0$; autrement dit $\frac{p}{n}$ relations convenables sont nécessaires et suffisantes pour que les p premières dérivées de $f^n x - x$ soient nulles pour $x = a$.

Il serait désirable de démontrer directement ce théorème qu'il est d'ailleurs facile de vérifier.

Ainsi, pour $n = 2$, la relation

$$a_1 + 1 = 0$$

entraîne

$$A_1 = 0. \qquad A_2 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$3a_2^2 + 2a_3 = 0$$

entraîne

$$A_3 = 0, \qquad A_4 = 0.$$

Jointe aux deux précédentes, la relation

$$2a_5 + 15a_2a_4 - 30a_2^4 = 0,$$

entraîne à son tour

$$A_5 = 0, \qquad A_6 = 0, \qquad \ldots.$$

Pour $n = 3$, la relation

$$a_1 = e^{\pm \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$$

entraîne

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$(-3a_4 + 15a_2^3 + 2a_2a_3) + e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}(-3a_4 + 3a_2^3 - 14a_2a_3) = 0$$

entraîne

$$A_4 = 0, \qquad A_5 = 0, \qquad A_6 = 0, \qquad \ldots.$$

Serret a montré (*Algèbre supérieure*) que la fonction

$$y = 2\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{x}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0.$$

Toutes les dérivées de $f^n x - x$ sont nulles au point-racine et d'ailleurs, en tout point, les coefficients de $\frac{x^i}{i!}$, dans le développement de cette fonction, satisfont aux conditions sus-énoncées.

Si une fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0,$$

pour une valeur quelconque de x il ne saurait, par définition, exister ni convergence, ni divergence, puisque après n itérations on retombe sur la valeur initiale; c'est ce que montre aussi notre analyse; la $n^{\text{ième}}$ itérative ayant pour valeur x, la première dérivée de $f^n x - x$, différente de zéro, est d'ordre infini; il y a donc une infinité de secteurs de convergence et de secteurs de divergence infiniment petits, et alternant; on ne peut donc plus dire que x soit pris dans un secteur de convergence ou dans un secteur de divergence.

A part ce cas, nous arrivons donc, comme dans notre première étude, à trouver, autour du point a et dans un cercle infiniment petit, deux aires de convergence et de divergence de même surface. Il se peut qu'un secteur de divergence fasse partie d'une région de convergence à distance finie, cette région aboutissant finalement à un secteur de convergence; c'est ce qui se passe pour la fonction

$$y = a + \sqrt[p-1]{\frac{C(x-a)^{p-1}}{C+(x-a)^{p-1}}}$$

dont nous nous sommes déjà servi [1] et qu'a employée aussi M. Leau, dans sa thèse si intéressante [2]. Nos résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 16 novembre 1896 et le 31 mai 1897.