Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 576-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__576_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 929.

(1869, p. 192.)

NOTE

Par LA REDACTION.

Il s'agit d'une série qui exprime le nombre $\frac{2}{\pi}$; la question était attribuée à Catalan. Dans la *N. C. M.*, 1876, p. 272, celui-ci a fait connaître que la formule en question est due à M. Bauer (*J. de Crelle*, t. 56, p. 110).

Question 1716.

(1896, p. 103.)

On considère une série de coniques semblables qui ont même corde normale NN' (N *et* N' *sont des points fixes*). *Chercher l'enveloppe de ces coniques et le lieu de l'extrémité de la corde de courbure au point* N.

(CL. SERVAIS.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Rappelons d'abord les formules générales suivantes.

Soit la conique d'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si l'on pose

$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC)}{AC - B^2},$$

et si α^2 et β^2 sont les carrés des demi-axes de la conique (1), on a

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{(A+C)F_1}{AC - B^2},$$

$$(3) \qquad \alpha^2\beta^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

Si les coniques (1) sont toujours semblables, on peut poser $\alpha = \beta k$. Alors (2) et (3) deviennent

$$\beta^2(1 + k^2) = -\frac{(A+C)F_1}{AC - B^2},$$

$$\beta^4 k^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

D'où, en éliminant β^2,

$$(4) \qquad \frac{(1+k^2)^2}{k^2} = \frac{(A+C)^2}{AC - B^2},$$

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine en N, la tangente en N étant l'axe des x, et la normale NN' l'axe des y. En posant $NN' = a$, l'équation de la conique de l'énoncé est

$$(5) \qquad Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay = 0.$$

En posant $\frac{(1+k^2)^2}{k^2} = \frac{1}{m}$, l'équation (4) devient pour la conique (5),

$$(6) \qquad B^2 + A + m(A-1)^2 = 0.$$

1° *Enveloppe des coniques* (5). — En portant la valeur B déduite de (5) dans (6), on obtient une équation du second degré en A. En exprimant que les deux racines de cette équation en A sont égales, on trouve la quartique

$$(7) \quad m(x^2+y^2)^2 - a(1-2m)x^2y - 2amy^3 + a^2my^2 = 0.$$

2° *Lieu de l'extrémité de la corde de courbure en N.* — N étant le point où la conique est normale à NN′, si

$$y - px = 0$$

représente l'équation de la corde de courbure, l'équation du cercle osculateur en N est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay + \lambda y(y - px) = 0,$$

avec les conditions

$$A = \lambda - 1, \qquad 2B = \lambda\mu.$$

Par suite,

$$\lambda = A + 1, \qquad \mu = \frac{2B}{A+1}.$$

L'équation de la corde de courbure est donc

$$(8) \qquad y = \frac{2B}{A+1}\,x.$$

On aura le lieu de l'extrémité de cette corde de courbure en éliminant A et B en éliminant (5), (6) et (8). De (5) et (8) on tire A et B que l'on porte dans (6). On trouve ainsi que le lieu est la sextique

$$(9) \quad \begin{cases} 4mx^2(x^2+y^2+ay)^2 + y^2(x^2+y^2-ay)^2 \\ \qquad\qquad - 4ax^3y(x^2+y^2) = 0. \end{cases}$$

Remarque. — I. Si $k = 1$, alors $m = \frac{1}{4}\cdot$ Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$(x^2+y^2-ay)^2 = 0,$$
$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-ay)^2 = 0.$$

En effet, dans ce cas, les coniques (5) se réduisent toutes au cercle

$$x^2+y^2-ay = 0.$$

décrit sur NN′ comme diamètre.

II. On trouverait aisément les questions suivantes, qui découlent des propriétés énoncées :

1° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont le rayon de courbure en N est minimum;

2° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont l'aire est minima;

3° Le lieu du centre des coniques (5) est une quartique;

4° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec les tangentes parallèles à NN′ est une quartique;

5° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec la tangente perpendiculaire à NN′ est une quartique.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. Cl. Servais.

Soit P un point quelconque, on mène NP et l'on élève au point N sur cette droite une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la droite N'P au point P'. Ce point est le correspondant du point P dans la transformation quadratique de deuxième espèce (1). Donc lorsque P décrit une droite (D) le point P' décrit une conique (C) normale à la droite NN' au point N et passant par N'. Sur NN', comme diamètre, décrivons un cercle; ce cercle correspond à la droite de l'infini; soient R et S les points réels ou imaginaires, où la droite (D) rencontre ce cercle; N'R et N'S seront parallèles aux asymptotes de (C). Si les coniques (C) sont semblables, l'angle RN'S est constant et l'enveloppe de (D) est un cercle ω concentrique au cercle NN'. Par conséquent, l'enveloppe de toutes les coniques est la transformée du cercle ω ou une quartique circulaire ayant N pour point de rebroussement, N' pour point double et la droite de l'infini pour tangente double. La tangente au point N est perpendiculaire à NN', et les tangentes au point double N' sont les droites qui joignent N' aux points de rencontre de la perpendiculaire à NN' au point N avec le cercle ω. N est donc un nœud dans le cas des ellipses et un point isolé dans le cas des hyperboles.

Du point N abaissons sur (D) une perpendiculaire rencontrant cette droite au point H, et le cercle NN' en un point I appartenant à (C), comme étant le correspondant à l'infini de la droite (D). La droite IN' est l'intersection du cercle NN' avec (C), donc elle est parallèle à la corde de courbure au point N (2). L'extrémité de cette corde est donc le point H' correspondant du point H. Mais H décrit un limaçon de Pascal vu que la droite RS est tangente au cercle ω; donc H' décrit la transformée quadratique de deuxième espèce de cette courbe.

La méthode employée a donné la construction, point par point, des courbes cherchées; elle donne aussi la construction des tangentes à ces courbes.

---

(1) Voir *Mathesis*, t. VII, p. 188.

(2) *Id.*, t. VIII, p. 33.