NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DUMONT

Remarque sur l'application de la logique à la théorie des régions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 547-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__547_0>

[Q4a]

REMARQUE SUR L'APPLICATION DE LA LOGIQUE A LA THÉORIE DES RÉGIONS;

PAR M. DUMONT.

On sait que la théorie du syllogisme donnée par Euler (*Voir* JANET, *Cours de Philosophie*) repose sur la possibilité, trois propriétés A, B, C étant données, qu'un objet peut posséder ou ne pas posséder, de représenter par des cercles tracés dans un même plan tous les cas possibles.

Mais si, généralisant et considérant un nombre quelconque de propriétés, on cherche une représentation complète des cas, on voit que le cercle ne suffit plus. En effet, d'après une formule donnée par Steiner, le nombre maximum de régions déterminées dans un plan par n cercles est

$$2 + n(n-1),$$

parmi lesquelles une est infinie. Or, le nombre des cas possibles, étant données n propriétés A, B, ... indépendantes les unes des autres est évidemment 2^n; de sorte que, dès que n atteint 4, le nombre maximum des régions est inférieur au nombre des cas. Pour $n = 4$, la différence est 2; pour $n = 5$, elle est 10.

Si l'on considère l'espace à trois dimensions et, dans cet espace, des sphères, on aura une représentation complète pour le cas de $n = 4$; le nombre maximum des régions est, en effet, dans ce cas, d'après Steiner

$$2n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Pour $n=4$, il est donc 16. Mais, dès que n dépasse 4, la représentation est incomplète. Pour $n=5$ par exemple, le nombre maximum des régions est 30, tandis que celui des cas est 32.

Si, au lieu de la circonférence ou de la sphère, on emploie la droite ou le plan, la représentation complète cesse plus tôt. Ainsi, 3 droites dans le plan ne donnent que 7 régions, et 4 plans dans l'espace que 15 régions.

Mais, d'après la formule donnée par M. Cahen (voir *Nouvelles Annales*, décembre 1897), la représentation (si toutefois cette expression peut s'employer ici) est toujours possible dans les espaces supérieurs. Le nombre des régions déterminées dans un espace à p dimensions par n variétés à $p-1$ dimensions est, en effet,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots(p-1)} + \ldots + \frac{n}{1} + 1,$$

et ce nombre est égal à 2^n si n est $\leqq p$.

Ainsi, dans le cas de n propriétés, il suffira d'avoir recours à l'espace à n dimensions.

Il est probable que les variétés analogues à la circonférence et à la sphère permettraient de se contenter d'un espace à $n-1$ dimensions.