NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les coniques qui sont les projections d'une cubique gauche

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 541-546

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__541_1>

[$M^3 5 c\gamma$]

SUR LES CONIQUES QUI SONT LES PROJECTIONS D'UNE CUBIQUE GAUCHE;

Par M. Ch. BIOCHE.

1. Si l'on projette une cubique gauche sur un plan, en prenant pour centres de projection des points de

cette cubique, on obtient des coniques qui forment un système dépendant d'un seul paramètre. Ces coniques sont circonscrites au triangle formé par les points d'intersection de la cubique et du plan. On voit immédiatement :

1° Qu'il y a deux coniques du système passant par un point; ce sont les traces des cônes ayant pour sommets les extrémités de la corde de la cubique qui passe par ce point;

2° Qu'il y a quatre coniques tangentes à une droite du plan; car, par une droite, on peut mener quatre plans tangents à une cubique gauche, et les points où ces plans coupent la courbe sont les sommets des cônes dont les traces sont tangentes à la droite considérée.

En cherchant une définition de ce système de coniques, qui ne fasse pas intervenir d'éléments hors du plan, j'ai été conduit à considérer des éléments que je vais définir.

2. Étant donné un triangle ABC, si l'on mène à une conique Σ, circonscrite à ce triangle, les tangentes ayant pour points de contact A, B, C, les points A', B', C' où ces tangentes coupent les côtés du triangle sont sur une droite Δ qu'on peut appeler la *droite de Pascal* correspondant à la conique.

Réciproquement, à toute droite Δ correspond une conique circonscrite à ABC, dont Δ est la droite de Pascal. Si la droite Δ a pour équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, la conique Σ a pour équation

$$\frac{YZ}{\alpha} + \frac{ZX}{\beta} + \frac{XY}{\gamma} = 0.$$

3. De même, si l'on joint les sommets du triangle ABC aux points où une conique S, inscrite dans le triangle, touche les côtés opposés, les droites ainsi obtenues concourent en un point P qu'on peut appeler *le point de Brianchon* correspondant à la conique.

Réciproquement, à tout point P correspond une conique inscrite à ABC, dont P est le point de Brianchon. Si P a pour coordonnées α, β, γ, la conique S a pour équation ponctuelle

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}+\frac{Z^2}{\gamma^2}-2\frac{YZ}{\beta\gamma}-2\frac{ZX}{\gamma\alpha}-2\frac{XY}{\alpha\beta}=0,$$

et pour équation tangentielle

$$\frac{vw}{\alpha}+\frac{wu}{\beta}+\frac{uv}{\gamma}=0.$$

4. Soit maintenant un faisceau de coniques circonscrites à ABC :

$$(A+\lambda A')YZ+(B+\lambda B')ZX+(C+\lambda C')XY=0;$$

pour qu'une droite

$$uX+vY+wZ=0$$

soit droite de Pascal d'une conique du faisceau, il faut que l'on ait pour une valeur de λ

$$u(A+\lambda A')=v(B+\lambda B')=w(C+\lambda C').$$

Si l'on désigne par μ la valeur commune de ces expressions, et si l'on élimine λ et μ entre les trois équations ainsi obtenues, on a l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites de Pascal correspondant aux coniques du faisceau

$$\begin{vmatrix} Au & A'u & 1 \\ Bv & B'v & 1 \\ Cw & C'w & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Cette enveloppe est une conique inscrite dans le triangle et le point de Brianchon correspondant a ses coordonnées déterminées par les équations

$$(BC' - CB')x = (CA' - AC')y = (AB' - BA')z.$$

On obtient précisément les mêmes valeurs de x, y, z en cherchant la solution commune aux équations

$$A\,YZ + B\,ZX + C\,XY = 0,$$
$$A'YZ + B'ZX + C'XY = 0,$$

pour laquelle aucune des coordonnées n'est nulle.

Donc, *les droites de Pascal des coniques qui sont circonscrites à* ABC *et qui passent par un point* D *enveloppent une conique inscrite dans* ABC *et ayant pour point de Brianchon le point* D.

5. On peut déduire de là une construction simple du quatrième point d'intersection de deux coniques circonscrites à un triangle ABC, ces coniques étant définies par leurs droites de Pascal Δ, Δ'. Il suffit de déterminer le point D de Brianchon correspondant à la conique qui est inscrite dans le triangle et touche Δ et Δ'.

Il est facile d'obtenir les propriétés corrélatives des précédentes.

6. Considérons maintenant les coniques, projections d'une cubique gauche. Les tangentes en B et C à une conique du système se correspondent homographiquement; car le sommet d'un cône contenant la cubique correspond homographiquement à chacune de ces tangentes. Donc les traces B′ et C′ des tangentes sur les côtés opposés déterminent sur ceux-ci des divisions homographiques. D'autre part, le point A est son propre homologue; par suite B′C′, qui n'est autre que la droite de Pascal, passe par un point fixe ω.

On peut remarquer que si le centre de projection se rapproche de B, par exemple, la trace BB′ du plan tangent à ce cône a pour position limite la trace du plan osculateur, et lorsque le centre de projection est en B, la droite CC′ se confond avec CB. Donc la droite de Pascal a même position limite que BB′ et le point ω est sur les traces des plans osculateurs en ABC à la cubique. Il résulte de là que :

Les projections d'une cubique gauche sont des coniques circonscrites à un triangle telles que les droites de Pascal correspondantes passent par un point fixe.

7. Si l'on se donne un système de coniques possédant les propriétés précédentes, il y a une infinité de cubiques admettant ces coniques comme projections; pour préciser le degré d'indétermination, je vais montrer que par deux points il passe deux de ces cubiques.

Deux coniques Σ_1, Σ_2, projections d'une cubique, se coupent aux points A, B, C, traces de la cubique sur le plan, et en un point D, trace de la ligne des sommets des cônes projetants. J'ai montré que ce point D était le point de Brianchon d'une conique S inscrite dans ABC et admettant pour tangentes les droites de Pascal de Σ_1 et Σ_2.

Par suite, si l'on suppose donnés le triangle ABC et le point ω, on peut prendre arbitrairement deux points O_1, O_2; la trace D de O_1O_2 sur le plan ABC détermine une conique S ayant D pour point de Brianchon. Les deux tangentes menées de ω à S peuvent être prises comme droites de Pascal de deux coniques Σ_1, Σ_2. Les cubiques, intersections des cônes $O_1\Sigma_1$, $O_2\Sigma_2$ ou des cônes $O_1\Sigma_2$, $O_2\Sigma_1$, ont pour projections le système des coniques qui sont circonscrites à ABC et dont les droites de Pascal passent par ω.

8. Si deux sommets du triangle ABC étaient imaginaires, on pourrait cependant construire facilement la droite de Pascal correspondant à une conique. Supposons que A soit le point réel; le point A′ où la tangente en A coupe BC est un point de la droite de Pascal; de plus, si P est le pôle de BC par rapport à la conique, le côté BC et la droite de Pascal divisent harmoniquement AP, car ces trois droites sont les diagonales du quadrilatère complet formé par AB, AC, BB′, CC′.

9. D'ailleurs, on peut donner une autre propriété caractéristique du système des coniques considérées. En se reportant à la démonstration faite pour établir que la droite de Pascal passe par un point fixe, on voit que le lieu du pôle de BC par rapport aux coniques du système est une conique passant par ABC et admettant ω pour pôle de BC. Donc, on peut dire que :

Les projections d'une cubique gauche sont des coniques circonscrites à un triangle et telles que le lieu du pôle d'un côté par rapport à ces coniques soit une conique circonscrite au triangle.

10. Cette propriété donne des conditions sous forme très simple dans certains cas: par exemple, si l'on considère un système de cercles passant par un point A, la condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles soient les projections d'une cubique gauche est que leurs centres soient sur un cercle passant par A. Le centre de ce dernier cercle est le point d'intersection des plans osculateurs en A, B, C à toute cubique admettant comme projections les cercles du système.