E. DUPORCQ

# Deuxième concours des « Nouvelles annales » pour 1897

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 17 (1898), p. 53-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__53_0>

[$M^3 5 h \beta$]

# DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

Par M. E. DUPORCQ [1].

Dans ce qui va suivre, nous appellerons :

1° *Cubique équilatère* une cubique gauche dont les trois asymptotes sont deux à deux rectangulaires. (Exemple : la cubique des normales à l'ellipsoïde.)

2° *Tétraèdre orthocentrique* un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales. Dans un tel tétraèdre, les hauteurs sont concourantes ; le point de concours des hauteurs est aussi le point par lequel passent les perpendiculaires communes aux arêtes opposées ; enfin ce tétraèdre est conjugué par rapport à une sphère qui a son centre au point de rencontre des hauteurs.

Cela posé, on propose de démontrer les propriétés suivantes :

I. *Si deux cordes* AB, CD *d'une cubique équilatère sont orthogonales, le tétraèdre* ABCD *est orthocentrique.*

II. *Si une cubique gauche* quelconque *passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique, elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique.*

III. *Toute cubique équilatère circonscrite à un tétraèdre orthocentrique passe par le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre.*

---

[1] Mémoire ayant obtenu le prix.

IV. *Toute cubique passant par les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique est équilatère.*

V. *Si l'on coupe une cubique équilatère par une série de plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ayant pour sommets les points de rencontre de la cubique et des plans est la sécante double de la cubique normale aux plans secants.*

VI. Soit $\Sigma$ une sphère de rayon R et dont le centre O est sur une cubique équilatère. Il existe une infinité de tétraèdres ABCD inscrits à la cubique et conjugués par rapport à $\Sigma$.

1° *Le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une droite.*

2° *On considère les sphères* S *circonscrites aux tétraèdres* ABCD ; *le lieu des centres de ces sphères est une droite. — Comment se déplace cette droite lorsque* O *restant fixe* R *varie ?*

3° *Chaque sphère* S *coupe la cubique en deux autres points* E *et* F. *Démontrer que ces points sont fixes et ne dépendent pas de* R.

4° *Lorsque* O *varie, la droite* EF *décrit une quadrique et le plan* OEF *enveloppe un cône du deuxième degré.*

5° *Lorsque* O *varie, le milieu de* EF *décrit une cubique équilatère.*

Nous commencerons par rappeler que, s'il existe un triangle inscrit à une conique C′ et conjugué à une conique C, il en existe une infinité jouissant de la même propriété : on dit que la conique C′ est *harmoniquement circonscrite* à la conique C. De même, une quadrique Q′

est harmoniquement circonscrite à une quadrique Q, quand il existe un tétraèdre à la fois inscrit à Q′ et conjugué à Q, et il y a alors une infinité de tétraèdres analogues. A ces propriétés correspondent par dualité des propriétés relatives aux coniques ou aux quadriques *harmoniquement inscrites*.

La condition, qui exprime qu'une conique ou qu'une quadrique est harmoniquement circonscrite à une conique ou à une quadrique donnée, étant linéaire, on voit que, si deux coniques ou deux quadriques sont harmoniquement circonscrites à une troisième, il en sera de même de toutes les coniques ou quadriques du faisceau linéaire déterminé par les deux premières. En particulier :

*Étant donnée une conique* C′ *harmoniquement circonscrite à une conique* C, *si un quadrangle inscrit dans* C′ *est tel que l'un des couples de ses côtés opposés soit formé de deux droites conjuguées à* C, *il en est de même des deux autres couples.*

Par dualité, cette propriété se transforme en la suivante qui nous servira dans la suite :

*Étant donnée une conique* C′ *harmoniquement inscrite à une conique* C, *si un quadrilatère circonscrit à* C′ *est tel que l'un des couples de ses sommets opposés soit formé de points conjugués à* C, *il en est de même des deux autres couples.*

I. Ceci posé, soient A, B, C, D, L, M, N sept points d'une cubique gauche quelconque. Considérons la conique suivant laquelle cette cubique se projette du point A sur le plan LMN : à cette conique sont inscrits le triangle LMN et le triangle formé par les traces du trièdre ABCD : ces deux triangles étant inscrits à une même conique, il existe, comme on sait, une conique tangente à leurs six côtés : on déduit de là que la conique, inscrite au triangle LMN et tangente à deux faces du tétraèdre ABCD, est tangente aux deux autres faces. Autrement dit :

*Si sept points* A, B, C, D, L, M *et* N *appartiennent à une même cubique gauche, il existe une conique* $\Gamma$, *inscrite à la fois au triangle* LMN *et au quadrilatère formé par les traces du plan* LMN *sur les faces du tétraèdre* ABCD.

Si les points L, M et N sont les points à l'infini d'une cubique gauche équilatère, c'est-à-dire les sommets d'un triangle conjugué à l'ombilicale, la conique $\Gamma$ sera harmoniquement inscrite à l'ombilicale et inscrite au quadrilatère qui admet pour sommets les points à l'infini des arêtes du tétraèdre ABCD. Si donc deux sommets opposés de ce quadrilatère sont des points conjugués à l'ombilicale, il en sera de même des deux autres couples de sommets opposés : autrement dit, si deux arêtes opposées du tétraèdre ABCD sont orthogonales, il en sera de même de deux arêtes opposées quelconques, et ce tétraèdre sera orthocentrique.

II. Soit $\Gamma$ une cubique gauche circonscrite à un tétraèdre T conjugué à une quadrique Q ; toutes les quadriques qui contiennent cette cubique sont alors harmoniquement circonscrites à Q : par suite, $\alpha$ étant un point quelconque de $\Gamma$, elles couperont le plan polaire P de $\alpha$ par rapport à Q suivant des coniques harmoniquement circonscrites à cette quadrique. Or ces coniques ne sont évidemment assujetties qu'à passer par les trois points $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ où le plan P coupe la cubique $\Gamma$ : il faut donc que le triangle $\beta\gamma\delta$ soit conjugué à la quadrique Q. Ainsi :

*Le plan polaire* P *d'un point quelconque* $\alpha$ *de la cubique* $\Gamma$ *coupe cette courbe aux trois sommets d'un triangle conjugué à la quadrique* Q.

Réciproquement :

*Si un triangle* $\beta\gamma\delta$ *inscrit à la cubique* $\Gamma$ *est conjugué à la quadrique* Q, *le pôle* $\alpha$ *du plan* $\beta\gamma\delta$ *par rapport à* Q *sera sur la cubique.*

En effet, le plan polaire de $\beta$ par rapport à Q doit couper la cubique aux sommets d'un triangle conjugué à Q, et, comme $\gamma$ et $\delta$ sont deux de ces sommets, le troisième est nécessairement $\alpha$.

Nous dirons que la cubique $\Gamma$ est *harmoniquement circonscrite* à la quadrique Q.

III et IV. Supposons que le tétraèdre T soit orthocentrique et que la quadrique Q soit la sphère $\Sigma$ conjuguée à ce tétraèdre. D'après ce qui précède, toute cubique gauche circonscrite au tétraèdre T et passant par le centre O de $\Sigma$ coupera le plan polaire de O par rapport à $\Sigma$, c'est-à-dire le plan de l'infini, aux trois sommets d'un triangle conjugué à l'ombilicale : autrement dit, cette cubique sera équilatère.

Réciproquement, toute cubique équilatère circonscrite au tétraèdre T passera par le point O.

V. Soient B, C, D les points d'intersection d'une cubique équilatère avec un plan P, et AO la sécante double de cette cubique, normale au plan P. Il existe une sphère $\Sigma$ de centre O telle que le point A soit par rapport à elle le pôle du plan P, et la cubique $\Gamma$ est harmoniquement circonscrite à cette sphère, puisqu'elle passe par son centre et qu'elle est équilatère. Le tétraèdre ABCD est donc conjugué à la sphère $\Sigma$, et la droite AO passe, par suite, par l'orthocentre du triangle BCD. Ce point décrit donc bien la droite AO quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

Si le plan P est perpendiculaire à une tangente à la cubique, la sécante AO se confond avec cette tangente, et le trièdre ABCD est trirectangle.

VI. Nous venons d'obtenir une infinité de tétraèdres ABCD inscrits à la cubique $\Gamma$, admettant même orthocentre O et un sommet commun A. Il est facile de voir que les sphères S circonscrites à ces tétraèdres passent par un cercle fixe.

Il existe, en effet, une quadrique H passant par la cubique $\Gamma$ et admettant pour direction de plan cyclique celle du plan P ; soit Q la direction conjuguée de plans cycliques. La quadrique H et la sphère S ont en commun la circonférence (BCD) : elles ont donc une autre circonférence commune, et celle-ci est évidemment la section de la quadrique H par le plan de direction Q mené par A, c'est-à-dire la circonférence (AEF), en désignant par E et F les points où ce plan coupe la cubique.

1°, 2° et 3° [1]. Ainsi, si l'on considère deux tétraèdres orthocentriques, inscrits à la cubique $\Gamma$, ayant même orthocentre O, et admettant un sommet commun A, les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux mêmes points E et F de la cubique. Il est facile de voir que cette condition, imposée aux tétraèdres, d'avoir

---

[1] Ces trois parties sont résolues dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles sont énoncées.

un sommet commun, est superflue et que les points E et F ne dépendent que du point O.

Soient, en effet, ABCD et $A'B'C'D'$ deux tétraèdres orthocentriques inscrits à $\Gamma$ et de même orthocentre O. Considérons le plan $B'C''D''$ mené par $B'$ parallèlement au plan BCD, et qui coupe la cubique en $C''$ et $D''$. Les tétraèdres ABCD et $A'B'C'D'$ ont chacun un sommet commun avec le tétraèdre $AB'C''D''$, qui admet également O pour orthocentre. Par suite, les sphères circonscrites aux deux premiers tétraèdres coupent la cubique en deux mêmes points de la sphère circonscrite au troisième.

On sait qu'une sphère harmoniquement circonscrite à une quadrique en coupe orthogonalement la sphère orthoptique ; si donc les tétraèdres ABCD considérés sont conjugués à une même sphère $\Sigma$ de rayon R, les sphères S couperont orthogonalement la sphère de centre O et de rayon $R\sqrt{3}$. Comme elles doivent, d'autre part, passer par les points E et F, elles auront une circonférence commune dans le plan OEF et leurs centres $\omega$ seront sur une même perpendiculaire $\Delta$ à ce plan ; cette droite $\Delta$ se déplacera parallèlement à elle-même dans le plan perpendiculaire au milieu du segment EF, quand le rayon R variera.

Soient G le centre de gravité d'un des tétraèdres considérés, $g$ le centre de gravité de l'une de ses faces, enfin $O_1$, $G_1$ et $\omega_1$ les projections orthogonales sur cette face des points O, G et $\omega$. On sait que $G_1$ divise le segment $O_1 g$ dans le rapport $\frac{3}{4}$, et que $g$ divise le segment $O_1 \omega_1$ dans le rapport $\frac{2}{3}$. Il en résulte que $G_1$ est le milieu de $O_1 \omega_1$ et, par suite, G le milieu de $O\omega$. Le lieu du point G est donc la droite parallèle à $\Delta$, située dans le plan $O\Delta$ et équidistante de la droite $\Delta$ et du point O.

4° A tout point O de la cubique $\Gamma$ correspond, comme nous l'avons vu précédemment, une sécante double EF ; de notre démonstration il résulte de plus que, si O′ désigne un point quelconque de la cubique, auquel correspond de même une sécante double E′F′, les plans O′EF et OE′F′ sont parallèles, leur direction commune et celle des plans normaux à OO′ étant deux directions cycliques conjuguées d'une même quadrique H, contenant la cubique $\Gamma$.

Par un point arbitraire $\Omega$ menons les parallèles $\Omega\alpha$ et $\Omega\alpha'$ aux cordes EF et E′F′ ; quand le point O′ se rapproche indéfiniment du point O sur la cubique, le plan $\Omega\alpha\alpha'$ tend à devenir le plan tangent le long de l'arête $\Omega\alpha$ au cône engendré par cette droite, et sa direction coïncide alors avec celle du plan OEF ; nous voyons donc que :

*Si l'on considère le cône décrit par la droite* $\Omega\alpha$, *le plan* OEF *est parallèle au plan tangent à ce cône le long de l'arête* $\Omega\alpha$.

Nous allons chercher à déterminer ce cône. Remarquons, à cet effet, que la direction du plan $\Omega\alpha\alpha'$ et celle des plans normaux à OO′, directions cycliques conjuguées d'une quadrique H passant par la cubique, sont aussi des directions cycliques du cône asymptote de cette quadrique, cône dont trois arêtes sont parallèles aux asymptotes de la cubique $\Gamma$. Considérons le trièdre OXYZ formé par les parallèles menées par le point O à ces arêtes : il nous suffit évidemment de prendre les points d'intersection 1, 2, 3 des arêtes du trièdre OXYZ avec un plan normal à OO′, et de faire passer par ces trois points une sphère qui coupe les arêtes en trois nouveaux points 1′, 2′, 3′ pour obtenir un plan 1′2′3′, parallèle aux plans OE′F′ et O′EF. Remarquons que les droites 1 2 et 1′2′ sont antiparallèles dans l'angle XOY; par suite, comme la projection sur le plan XOY de la normale OO′ au plan 1 2 3 est perpendiculaire à la droite 1 2, cette projection et la trace du plan OE′F′ sont symétriques par rapport aux côtés de l'angle XOY. Il en est de même pour les autres faces du trièdre. On déduit aisément de là la propriété suivante : soient $Ox$ et $Oy$ les traces des faces ZOX et ZOY sur un plan quelconque normal à OZ; soit $m$ la trace sur ce plan de la droite OO′, et M la droite qui joint les projections de $m$ sur $Ox$ et $Oy$ : *le plan* OE′F′ *et le plan* OM *sont symétriques par rapport à la droite* OZ.

Or, il est facile de voir que si le point $m$ décrit une hyperbole passant par O et ayant des asymptotes parallèles à $Ox$ et $Oy$, la droite M passera constamment par le centre $a$ de cette hyperbole; c'est justement ce qui a lieu quand le point O′ décrit la cubique : l'hyperbole équilatère décrite par le point M a alors pour asymptotes les traces sur le plan $xOy$ des plans déterminés par le point O et par les asymptotes de la cubique respectivement parallèles à $Ox$ et $Oy$ : la droite $Oa$ s'appuie donc sur ces deux asymptotes, et le plan OE′F′ passe constamment par la symétrique de $Oa$ par rapport à OZ. Nous retrouvons donc ainsi que ce plan passe par une droite fixe, que nous savons parallèle à EF. Ainsi :

*La droite* EF, *correspondant à un point* O *de la cubique, est, en direction, symétrique, par rapport à l'une quelconque des asymptotes de la cubique, de la droite qui passe par* O *et rencontre les deux autres asymptotes.*

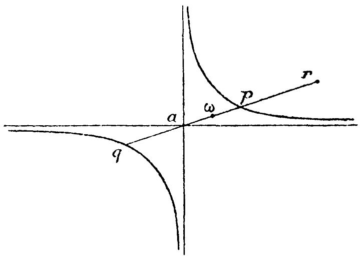
Or, cette droite $Oa$, qui s'appuie sur la cubique et deux de ses asymptotes, $\Delta_x$ et $\Delta_y$, engendre évidemment une quadrique U. Quand le point O s'éloigne à l'infini dans la direction de $\Delta_z$, la droite $Oa$ correspondante est la parallèle à $\Delta_z$ qui rencontre $\Delta_x$ et $\Delta_y$, c'est-à-dire la génératrice parallèle à $\Delta_z$ dans l'hyperboloïde, H, défini par les trois asymptotes : les plans asymptotes aux quadriques U et H menés par l'asymptote $\Delta_z$ sont donc confondus. Si, maintenant, par un point fixe $\Omega$, nous menons les parallèles aux droites $Oa$, elles engendrent un cône du second degré qui passe par la parallèle $\Omega\zeta$ à $\Delta_z$, et le plan tangent à ce cône le long de cette génératrice a la direction du plan asymptote que nous venons de considérer. Les parallèles $\Omega\alpha$ aux droites EF, étant symétriques des droites $\Omega a$ par rapport à $\Omega\zeta$, engendreront un cône du second degré ayant, le long de $\Omega\zeta$, le même plan tangent que le cône des droites $\Omega a$. Nous trouverions de même les plans tangents au cône décrit par $\Omega\alpha$, le long des génératrices parallèles à $Ox$ et $Oy$, et nous en concluons que :

*Le cône engendré par les parallèles* $\Omega\alpha$ *à* EF *est identique au cône asymptote de l'hyperboloïde*, H, *qui passe par les trois asymptotes de la cubique.*

Les droites EF décrivent donc la quadrique homothétique à ce cône et qui passe par $\Gamma$, et, comme nous avons vu que le plan OEF est parallèle au plan tangent à ce cône le long de l'arête $\Omega\alpha$, nous obtenons finalement le résultat suivant :

*La droite* EF *engendre une quadrique passant par la cubique* $\Gamma$, *et ayant le même cône asymptote que l'hyperboloïde* H, *qui passe par les trois asymptotes de cette cubique. Ce cône asymptote est d'ailleurs l'enveloppe du plan* OEF.

3° Projetons orthogonalement la cubique $\Gamma$ sur un plan perpendiculaire à l'asymptote $\Delta_z$ : nous obtenons une hyperbole équilatère, $\gamma$, passant par la trace $p$ de $\Delta_z$ et admettant pour asymptotes les projections des asymptotes $\Delta_x$ et $\Delta_y$. Soit $a$ son centre, $\omega$ le milieu de $pa$ et $q$ le symétrique de $p$ par rapport à $a$. Le point $\omega$ est évidemment la projection du centre de l'hyperboloïde H, qui coïncide, comme nous venons de le voir, avec celui de la quadrique Q engendrée par EF. Le plan $\Delta_z aq$ étant d'ailleurs un plan asymptote de la quadrique Q la coupe suivant deux droites parallèles à $\Delta_z$ : celle




d'entre elles qui appartient au système des génératrices EF (sécantes doubles de la cubique) se projette évidemment au point $q$ : le point $r$, symétrique de $q$ par rapport à $\omega$, est donc la projection de l'autre, qui appartient au système différent de génératrices et rencontre, par conséquent, toutes les droites EF. Les projections de celles-ci passent donc par $r$; le lieu du milieu des cordes EF a donc pour projection le lieu des milieux des segments interceptés par l'hyperbole $\gamma$ sur les droites passant par $r$. Or ce dernier lieu est évidemment l'hyperbole symétrique, par rapport à $\omega$, de l'hyperbole $\gamma$. Les points de la quadrique Q qui se projettent sur ce lieu sont donc diamétralement opposés à ceux de la cubique $\Gamma$. Donc :

*Le lieu des milieux des cordes* EF *est la cubique* *gauche symétrique de la cubique* Γ *par rapport au centre de l'hyperboloïde* H.