KARAGIANNIDÈS

Sur une extension d'une formule de M. Léauté

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 539-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__539_1>

[D3]

SUR UNE EXTENSION D'UNE FORMULE DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. KARAGIANNIDÈS.

Considérons une aire S que nous pouvons supposer, pour fixer les idées, *simplement connexe*, dont le con-

(1) *A. F. A. S.*, Bordeaux, 1895.

tour soit continu et ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points. Si ce contour était d'une nature plus complexe, on pourrait décomposer la région S en plusieurs autres dont chacune satisfasse à ces conditions. Cela posé, nous pouvons former une suite de polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et n en y possédant les trois propriétés suivantes : on a, quels que soient les entiers positifs ou nuls p et q :

1° $$P_{0,0} = 1;$$

2° $$\frac{dP_{p,q}}{dx} = P_{p-1,q}, \qquad \frac{dP_{p,q}}{dy} = P_{p,q-1};$$

3° $$\iint_S P_{p,q}\,dx\,dy = 0, \qquad (p^2 + q^2 > 0);$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire S; cette dernière condition signifie que la valeur moyenne de $P_{p,q}$ dans S est *nulle*. La valeur moynnne de $P_{0,0}$ est évidemment 1.

En effet, de la seconde condition il résulte aisément

$$P_{p,q} = \int_{x_0}^{x} P_{p-1,q}(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} P_{p,q-1}(x_0, y)\,dy + C,$$

pour $p = 0, 1, 2, \ldots, \infty$; $q = 0, 1, 2, \ldots, \infty$; C est une constante qu'on déterminera par la troisième condition.

Ainsi, en ayant égard à la première condition, on déterminera complètement les polynomes P en opérant successivement.

Appelons maintenant $f(x, y)$ un polynome de degré m en x et μ en y. Désignons par $|\text{moy.}\ \Phi(x, y)|$ la valeur moyenne d'une fonction $\varphi(x, y)$ dans l'aire S. On aura

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y) = |\text{moy.}\ f(x, y)| + P_{1,0}\left|\text{moy.}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \\ \qquad + P_{0,1}\left|\text{moy.}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\right| + \ldots + P_{m,n}\left|\text{moy.}\ \dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}\right|; \end{cases}$$

car, en écrivant le polynome inconnu $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y) = a_{0,0}\,\mathrm{P}_{0,0} + a_{1,0}\,\mathrm{P}_{1,0} + a_{0,1}\,\mathrm{P}_{0,1} + \ldots + a_{m,n}\,\mathrm{P}_{m,n},$$

où $\mathrm{P}_{0,0}$, $\mathrm{P}_{1,0}$, $\mathrm{P}_{0,1}$, ..., $\mathrm{P}_{m,n}$ sont les polynomes que nous venons de définir, $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $a_{0,1}$, ..., $a_{m,n}$ des constantes, on déterminera ces constantes en prenant successivement les valeurs moyennes des deux membres de $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ..., dans l'aire S et en ayant égard aux conditions auxquelles satisfont les polynomes P. C'est le développement (1) qui constitue la généralisation de la belle et intéressante formule de M. Léauté pour *une seule* variable (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, juin 1881; *Cours d'Analyse* à l'École Centrale, par M. Appell, p. 216).

On peut, dans certains cas, appliquer la formule (1) au développement d'une fonction $f(x, y)$ autre qu'un polynome, quand on connaît les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans l'aire S. Le second membre de la formule (1) est alors une série. Mais le développement n'est légitime que pour des fonctions spéciales $f(x, y)$ qu'il serait intéressant de caractériser, comme l'a fait Halphen pour les fonctions d'une variable auxquelles s'applique le développement de M. Léauté.