Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1898. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 512-522

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__512_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

1° *Qu'appelle-t-on solution singulière d'une équation différentielle du premier ordre ?*

2° *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0,$$

comment peut-on reconnaître, sur cette équation, si elle admet une solution singulière et déterminer cette solution?

3° *Comment peut-on déduire de l'intégrale générale la solution singulière?*

4° *Dans le cas où l'équation* (1) *n'admet pas de solution singulière, que représente l'équation obtenue en éliminant* y' *entre l'équation* (1) *et l'une ou l'autre des deux équations*

$$\frac{df}{dy'} = 0, \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0.$$

1° *Faire voir que la courbe*

$$(1) \qquad (x^3 + y^3)^2 = x^2(4x^2 - y^2)$$

est unicursale. Exprimer les coordonnées de chacun de ses points en fonctions rationnelles d'un paramètre.

2° *On coupera la courbe par le faisceau de courbes du quatrième ordre qui ont pour équation*

$$(x^3 + y^3)(ty - 2x) = x(4x^2 - y^2)$$

et l'on expliquera pourquoi ce faisceau de courbes conduit à la solution.

3° *Calculer l'intégrale*

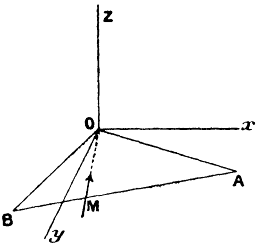
$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x},$$

x *et* y *étant liées par l'équation* (1).

Mécanique rationnelle.

Composition écrite. — *Un triangle isoscèle homogène* AOB, *rectangle en* O, *est mobile dans son plan*

xOy autour de son sommet O. En même temps un point matériel M, de masse m, est assujetti à se mou-



voir sur l'hypoténuse AB. On demande de déterminer le mouvement du système formé du triangle AOB et du point M en négligeant les frottements, et en supposant que le point M est attiré par le point O de l'axe fixe proportionnellement à sa distance à ce point.

Le côté AB peut être au besoin prolongé de part et d'autre des points A et B, sans que cela modifie le moment d'inertie C du triangle AOB par rapport à la droite OZ.

A l'instant initial, le triangle AOB étant immobile, on place le point matériel M au milieu de l'hypoténuse AB, et on lui donne une vitesse v_0 dirigée vers le point B.

Épreuve pratique. — 1° *Conditions pour qu'une droite soit principale d'inertie pour l'un de ses points.*

2° *Effet d'un système de percussion sur un solide mobile autour d'un axe fixe. Conditions pour que, dans le cas d'une percussion unique, cet axe ne subisse aucune réaction.*

3° *Centre de percussion d'une surface matérielle plane par rapport à une droite de son plan.*

Et 4° Centre de percussion d'un carré ***homogène,*** *par rapport* ***à*** *une parallèle* ***à*** *une des* ***diagonales.***

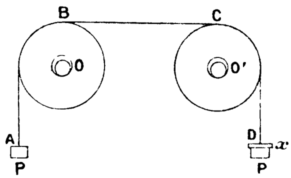
MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

QUESTION DE COURS. — *Exposer d'après* ***Hirn*** ***la*** *théorie physique de* ***la*** *machine à vapeur :*

1° *On développera en détail le cas des machines monocylindriques à condensation, sans enveloppe ni surchauffe ;*

2° *On résumera brièvement les conclusions relatives à l'emploi des enveloppes et de la surchauffe.*

PROBLÈME. — *Une corde* ABCD, *portant à ses extrémités deux poids égaux* P, *passe sur deux poulies*



identiques O *et* O′, *placées dans un même plan vertical, de manière que la partie* BC *de la corde soit sensiblement horizontale.*

On demande quel poids additionnel x on doit placer en D, *après avoir donné à l'ensemble un léger mouvement pour que, sous l'action de ce poids, le mouvement se continue avec une vitesse constante.*

On négligera le poids de la corde, mais on tiendra compte du frottement des pivots dans les chapes supposées fixes, de la raideur de la corde et du poids des poulies. On rappelle la formule

$$\sqrt{y^2 + x^2} = 0{,}96\,\mathrm{X} + 0{,}4\,\mathrm{Y},$$

approchée avec une erreur relative inférieure à $\frac{1}{25}$, *quand* Y *est inférieur à* X.

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Problème de Képler. — *Déterminer, en partant des lois de Képler, les valeurs, pour une époque donnée, de l'anomalie excentrique, du rayon vecteur et de l'anomalie vraie du Soleil; développements en séries suivant les puissances de l'excentricité, expression de l'équation du centre.*

2° *Établir les formules de la parallaxe en longitude et en latitude. On désignera par* γ_0, l_0, λ_0 *les coordonnées écliptiques du lieu d'observation, par* l, λ, P *la longitude, la latitude et la parallaxe horizontale de l'astre observé.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En une station* A, *la hauteur du centre du Soleil a été trouvée égale, toutes corrections faites, à* $41°58'11'',6$, *à* $3^h 2^m 31^s,9$, *temps moyen de Paris. Calculer la longitude de* A, *sachant que sa latitude est de* $44°41'8'',3$, *et que la déclinaison du Soleil est* $16°54'56'',4$.

L'observation a été faite après le passage du Soleil au méridien. Le temps vrai à midi moyen de Paris était ce jour-là $11^h 54^m 14^s,14$, *et le lendemain à midi moyen* $11^h 54^m 20^s,56$.

Si la hauteur du Soleil est erronée de $20''$, *quelle sera l'erreur correspondante de la longitude?*

Grenoble.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Sur des cylindres circulaires de même axe* Oz, *on considère des hélices dont les tangentes font un même angle avec l'axe commun des cylindres. On demande de déterminer le plan* *tangent, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques d'une surface qui serait engendrée par de telles hélices assujetties à la condition de passer par une droite qui coupe orthogonalement l'axe commun des cylindres.*

SOLUTION RÉSUMÉE.

Les équations de la surface étant

(1) $$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = kvu,$$

on a, pour le plan tangent,

(2) $$k(u\cos u - \sin u)X + k(u\sin u + \cos u)Y - Z = 0,$$

équation indépendante de v : la surface est développable. C'est le cône

$$k^2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right]\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = 1.$$

Les lignes de courbure sont données par

$$du(k^2uv\,du + dv + k^2u^2\,dv) = 0,$$

d'où

(3) $$u = c$$

et

(4) $$k^2u^2v^2 + v^2 = c_1^2.$$

Le premier système est formé des génératrices rectilignes de la surface; le second est formé des trajectoires orthogonales des précédentes, obtenues en coupant le cône par des sphères ayant leur centre au sommet du cône. L'équation (4) n'est autre que

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2.$$

Pour les lignes asymptotiques, on trouve

$$du^2 = 0.$$

ce qui donne les deux systèmes confondus avec les génératrices rectilignes, comme cela résulte évidemment de la nature de la surface considérée.

II. *Intégrer l'équation*

$$[x(x^2-y^2)+4xy^2)p-[y(x^2-y^2)-4x^2y]q=2(x^2+y^2)z,$$

et trouver une surface intégrale qui passe par le cercle

$$x^2+y^2=R^2, \qquad z=a.$$

SOLUTION.

Les caractéristiques sont données par

$$\frac{xy}{z^2}=\alpha, \qquad \frac{x^2-y^2}{z}=\beta;$$

elles rencontreront le cercle si l'on a

$$4a^2\alpha^2+a^2\beta^2=R^4;$$

d'où, pour la surface demandée,

$$4a^4x^2y^2+a^2(x^2-y^2)^2z^2-R^4z^4=0.$$

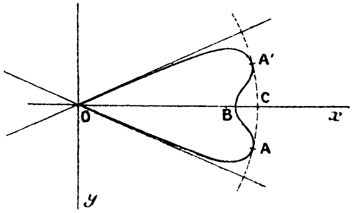
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calcul de l'aire de la portion de la sphère $x^2+y^2+z^2=2cz$ comprise à l'intérieur du cône $a^2x^2-b^2y^2=z^2$. On supposera $a^2>1$, $b^2\gtrless 1$.*

SOLUTION.

La moitié de la courbe d'intersection de la sphère et du cône se projette, sur xOy, suivant une courbe telle que OABA′O, dont l'équation est

$$R=\frac{2c\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}}{1+a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}.$$

Elle touche le cercle décrit de O comme centre avec le rayon C de la sphère en deux points A, A′, et, en chaque point de ABA'C se projettent deux éléments de l'aire considérée.



Pour $a^2 > 1$, $b^2 < 1$, on a

$$A = 8c^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} - \frac{8c^2}{\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1-b^2}{1+a^2}},$$

et pour $a^2 > 1$, $b^2 > 1$,

$$A = 8c^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} - \frac{8c^2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2-1)}} \log \frac{b\sqrt{a^2+1} + a\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ces formules conviennent d'ailleurs quand on suppose $a^2 < 1$.

Remarque. — En projetant les éléments sur le plan yOz, il n'y a pas de duplication à considérer.

Astronomie.

Composition écrite. — *Aberration. — Aberration annuelle, diurne. — Influence de l'aberration annuelle sur les coordonnées d'une étoile. — Influence de l'aberration diurne sur l'heure du passage d'une étoile au méridien.*

Épreuve pratique. — *Calculer pour un lieu de latitude λ la durée du jour vrai et celle du crépuscule, la déclinaison $\mathfrak{O}$ du Soleil étant donnée. Le crépuscule cesse quand le Soleil est à 18° au-dessous de l'horizon.*

Calculer, en outre, les variations des deux durées considérées quand la déclinaison $\mathfrak{D}$ du Soleil varie de $\pm 1^\circ$.

Données numériques

$$\lambda = 45^\circ 11' 12'',$$
$$\mathfrak{D} = -6^\circ 27' 4'',75.$$

SOLUTION.

α angle horaire du coucher du Soleil;

α' angle horaire du Soleil quand cesse le crépuscule.

On a

$$\cos\alpha = -\operatorname{tang}\mathfrak{D}\operatorname{tang}\lambda, \qquad \cos\alpha' = \cos\alpha - u,$$

$$u = \frac{\sin 18^\circ}{\cos\mathfrak{D}\cos\lambda}, \qquad d\alpha = \frac{\operatorname{tang}\lambda\, d\mathfrak{D}}{\sin\alpha\cos^2\mathfrak{D}},$$

$$d\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\, d\alpha + \frac{du}{\sin\alpha}, \qquad du = u\operatorname{tang}\mathfrak{D}\, d\mathfrak{D}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\alpha &= 83^\circ.27'.53'',21 = 5^h 33^m 51^s,54, \\
\alpha' &= 109.\ 6.45,89, \\
\alpha' - \alpha &= 25.38.52,68 = 1^h 42^m 35^s,52, \\
d\alpha &= d\alpha' = \pm 1^\circ 1' 3''.96 = \pm 4^m 6^s.26
\end{aligned}$$

pour $d\mathfrak{D} = \pm 1^\circ$.

La variation de durée du crépuscule est nulle : la déclinaison donnée correspond, en effet, au minimum de la durée du crépuscule pour le lieu considéré.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un point matériel dont la masse est prise pour unité se meut sans frottement sur une surface de révolution dont l'axe est vertical et dont le méridien a pour équation, dans le plan xz,*

$$z = f(x).$$

On désigne par r et θ les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan xy. Le point est pesant et de plus sollicité par une force située à chaque instant dans le plan du parallèle qui le contient et dont les composantes par rapport au rayon de ce parallèle prolongé et la tangente mesurée dans le sens où θ croît sont représentées par les formules

$$R = -\frac{2\mu - 2k\cos 2\theta}{r^3}, \qquad \Theta = -\frac{2k\sin 2\theta}{r^3}$$

(r rayon du parallèle).

On demande le mouvement du point. Ramener le problème à des quadratures dans le cas général et examiner le cas particulier suivant : La vitesse initiale v_0 est horizontale

$$f(x) = \frac{b^3}{x^2}, \qquad \theta_0 = 0, \qquad v_0 = a, \qquad v_0^2 = \frac{2(\mu + k - 9b^3)}{a^2}$$

(g intensité de la pesanteur, b, μ et k sont positifs et l'axe Oz est dirigé en sens inverse de la pesanteur).

Dans le cas particulier, le point reste sur le parallèle a; on étudiera les diverses circonstances que peut présenter son mouvement sur ce parallèle.

Épreuve pratique. — *La poulie d'une machine d'Atwood est formée d'une couronne cylindrique de 10^{cm} de rayon extérieur et de $9^{cm},2$ de rayon intérieur et d'une épaisseur de 6^{mm} reliée à un moyeu monté sur l'axe par quatre tiges prismatiques à base carrée de 6^{mm} de côté. On la regarde comme formée seulement de la couronne et des quatre tiges que, pour simplifier, on considérera comme des droites homogènes de même masse. Le tout est en cuivre dont le poids spécifique est 8,85. Les deux poids égaux sont de 200^{gr} et le poids additionnel de 10^{gr}.*

On demande l'accélération du mouvement :

1° *En tenant compte de la masse de la poulie ;*

2° *En négligeant cette masse.*

On néglige les résistances passives, le poids du cordon et la gorge de la poulie.