Nouvelles annales de mathématiques

E. Bally

Évaluation géométrique de l'ordre de la surface réglée définie par trois directrices d'ordres m, n, p

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 508-509
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__508_0>

[M²7a]

ÉVALUATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ORDRE DE LA SURFACE RÉGLÉE DÉFINIE PAR TROIS DIRECTRICES D'ORDRES m, n, p;

Par M. E. BALLY.

On admet qu'une courbe d'ordre q et une surface d'ordre r ont qr points communs.

Soient trois courbes C_m, C_n, C_p, d'ordres m, n, p.

Si les trois directrices sont rectilignes, $m = n = p = 1$, et la surface est une quadrique d'ordre $2 = 2mnp$.

Supposons démontré que si l'une au moins C_m des directrices est rectiligne, la surface réglée correspondante $S_{1,n,p}$ est d'ordre $2np = 2mnp$.

Soit $S_{m,n,p}$ la surface relative à trois courbes quelconques. Je suppose que les points de cette surface par lesquels passent plusieurs droites rencontrant C_m, C_n, C_p sont des points singuliers ou forment des lignes singulières.

Les courbes C_m, C_n, C_p sont de telles lignes singulières. Par un point de C_m passent np droites rencontrant C_n et C_p, communes aux deux cônes d'ordres n et p qui projettent C_n et C_p. Les plans de ces droites combinées deux à deux enveloppent une ou plusieurs surfaces développables, et une droite arbitraire de l'un de ces plans est tangente à l'une de ces développables.

Pour avoir l'ordre de $S_{m,n,p}$, je vais chercher le nombre de ses points communs avec une droite C_1 satisfaisant aux deux conditions :

1° De n'être tangente à aucune de ces développables ;

2° De ne passer par aucun des points singuliers précédents.

Pour cela, je considère la surface auxiliaire $S_{1,n,p}$ définie par C_1, C_n, C_p et d'ordre $2np$, par hypothèse. Elle est coupée par C_m en $2mnp$ points par chacun desquels passe une droite, et, en vertu de la première condition, une seule rencontrant C_1, C_n, C_p. De plus, deux droites relatives à deux points différents ne peuvent se couper sur C_1, en vertu de la deuxième condition. On trouve donc, sur C_1, exactement $2mnp$ points, et la surface est d'ordre $2mnp$.

On peut observer comme vérification que si les trois courbes se réduisent à des systèmes de m, n, p droites, les génératrices de la surface forment mnp demi-quadriques. Je dois cette remarque à M. L. Gérard.

Si par tout point de la surface (ou de l'une de ses parties quand celle-ci se décompose) passent a droites rencontrant les trois courbes données, cette surface (ou la partie en question) doit être comptée a fois.

Par exemple, soient trois sections planes d'une quadrique. Les droites qui rencontrent ces trois courbes sont : 1° les génératrices de six cônes du second ordre, dont chacun a son sommet en un point commun à deux courbes et projette l'autre ; 2° les génératrices des deux systèmes de la quadrique. En comptant celle-ci deux fois, on trouve bien 16 pour l'ordre du lieu complet.