Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1898. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 462-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__462_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Paris.

Calcul différentiel et Calcul intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un point d'une surface,* P *le point de rencontre du plan tangent en* M *à cette surface avec l'axe* Oz, Q *le point de rencontre de la droite* MP *avec le plan* xOy.

On demande :

1° *De trouver l'équation générale des surfaces* (Σ) *telles que le point* P *soit le milieu de* MQ;

2° *De démontrer que les lignes asymptotiques de ces surfaces s'obtiennent par une quadrature (on pourra prendre pour paramètres variables* z *et* $\frac{y}{x}$;

3° *De trouver parmi les surfaces précédentes la surface* (Σ), *la plus générale, dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont les intersections de cette surface et des paraboloïdes* $\frac{xz}{y} = C$;

4° *De démontrer que ces lignes asymptotiques sont des courbes unicursales.*

II. *Soit*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ pour que les courbes représentées par l'intégrale générale $F(x, y) = C$ forment une famille de courbes parallèles? Si cette condition est vérifiée, on peut intégrer l'équation (1) *par une quadrature.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{16 - (\cos x)^4}.$$

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Démontrer que toutes les surfaces pour lesquelles les sections planes, déterminées par des plans parallèles aux plans coordonnés des* xz *et des* yz, *forment deux familles de courbes conjuguées sont représentées par une équation de la forme*

$$z = \varphi(x) + \psi(y); \tag{1}$$

2° *En admettant que les axes soient rectangulaires, démontrer que l'élément linéaire de ces surfaces peut toujours être ramené à la forme*

$$dS^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2a(\alpha)b(\beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{2}$$

où α *est fonction de* x *et* β *de* y;

3° *Déterminer toutes celles de ces surfaces qui admettent le même élément linéaire donné par la formule précédente* (2);

4° *Prouver que, parmi les surfaces représentées par l'équation* (1), *il existe des surfaces minima et donner l'équation de ces surfaces.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Appliquer les formules de*

M. Schwarz à la détermination de la surface minima admettant pour ligne géodésique la courbe plane définie par les deux équations

$$x = 3\alpha - \alpha^3, \qquad y = 0, \qquad z = 3\alpha^2.$$

Construire les sections de cette surface par les plans coordonnés.

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface.

Analyse supérieure.

Épreuve écrite. — I. *Qu'appelle-t-on* groupe *d'une équation algébrique? Démontrer sa propriété fondamentale.*

II. *Établir la formule qui exprime, à partir d'une valeur suffisamment grande de k, le nombre des conditions pour qu'une surface de degré k passe par une courbe gauche de degré n, de genre p, ayant t points triples.*

Épreuve pratique. — *Quel est le genre de la courbe*

$$y^3 = x(x-1)(x-a)^2$$

où a désigne une constante différente de 0 et de 1?

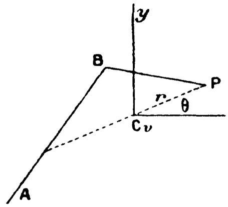
Former l'expression générale des intégrales de première espèce relatives à cette courbe.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *On lance, sur un plan horizontal parfaitement poli, un système matériel constitué :*

1° *Par une tige rigide* AB *rectiligne homogène, d'épaisseur infiniment petite, de longueur $2l$ et de masse m;*

2° *Par un point matériel* P *de même masse* m, *rattaché à l'extrémité* B *de la tige par un fil inextensible et sans masse de longueur* l.



On demande :

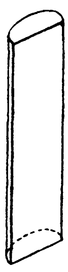
1° *Le mouvement du centre de gravité* G *du système ;*

2° *Le mouvement du système par rapport à des axes* Gx *et* Gy *de directions fixes passant par le centre de gravité.*

On appellera r *et* θ *les coordonnées polaires du point* P *par rapport aux axes* Gx *et* Gy

$$\mathrm{GP} = r, \qquad x\mathrm{GP} = \theta.$$

Epreuve pratique. — *On considère un cylindre droit homogène dont la masse est* 10^{gr}, *dont la hau-*



teur est 10^{cm} *et dont la base est un demi-cercle de* 1^{cm} *de rayon.*

Trouver :

1° *Le centre de gravité de ce cylindre ;*

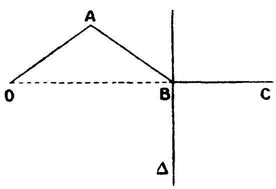
2° *Les directions des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ;*

3° *Les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité.*

MÉCANIQUE PHYSIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Question de cours. — *Mécanisme de la distribution de la vapeur dans le cylindre. Décrire les phases que traverse la tension de la vapeur d'un même côté du piston pendant une oscillation complète. Tiroir. Excentrique. Coulisse.*

II. Problème. — *On considère le dispositif formé d'une manivelle* OA, *tournant autour de l'axe* O *et reliée par la bielle* AB *à une glissière rectiligne* BC *dont le prolongement passe au point* O. *Soit* Δ *la per-*



pendiculaire élevée en B *à la glissière* BC. *Quelle est, par rapport à la manivelle* OA, *l'enveloppe* E *des positions relatives de la droite* Δ?

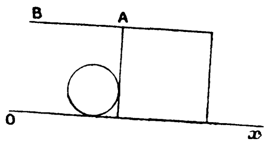
D'après le résultat obtenu, pourrait-on remplacer la bielle AB *par une came solidaire de la manivelle* OA *et agissant par contact direct sur un cadre solidaire de la glissière ?*

Marseille.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE. — *Dans un plan vertical une droite fixe* Ox *fait avec l'horizontale un angle dont la tangente est* $\frac{1}{10}$.

Sur cette droite Ox *peut glisser une plaque pesante, carrée et homogène de côté* $4a$, *dont le som-*



met le plus haut A *est attaché à l'extrémité d'un fil élastique* AB *de masse négligeable, dont l'autre extrémité* B *est fixe. La ligne* AB *est parallèle à* Ox. *A l'état naturel, la longueur du fil est* $4a$. *Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension, et sa longueur double sous une tension égale au poids de la plaque.*

Sur la même droite Ox *repose un disque pesant et homogène, de même poids que la plaque et de rayon* a. *Ce disque s'appuie, en outre, contre la plaque.*

La droite Ox *est dépolie, et le coefficient de son frottement contre le disque ou contre la plaque est* $\frac{1}{10}$. *Il n'y a pas de frottement entre le disque et la plaque.*

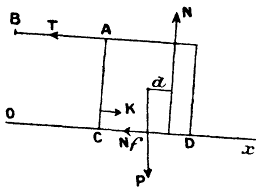
1° *Trouver dans quelles positions ce système est en équilibre. Comparer ces positions avec celle qu'on obtient en supprimant le frottement sur* Ox;

2° *Trouver le mouvement du système en supposant qu'à l'instant initial les vitesses sont nulles, et que le fil est à l'état naturel.*

SOLUTION.

Soit x l'allongement du fil AB compté à partir du point où le fil est à l'état naturel. Cette variable fixera la position de la plaque, si celle-ci reste sur Ox. La tension du fil correspondant à l'allongement x est évidemment $T = \frac{Px}{4a}$.

Équations d'équilibre. — On appelle N la réaction sur la plaque; elle passe à une distance d du centre de la plaque. Cette distance est naturellement inférieure à



$2a$, mais elle peut être positive ou négative. Nf est le frottement. On appelle K la réaction du disque sur la plaque, et P le poids de la plaque. On a les trois conditions

$$P\cos\alpha - N = 0,$$
$$P\sin\alpha + K = Nf + T,$$
$$Nd + T \times 2a + Ka = Nf \times 2a.$$

En outre, l'une des équations d'équilibre du disque est

$$P\sin\alpha = K.$$

On tire de là

$$8a\sin\alpha - 4af\cos\alpha - x = 0,$$
$$2d\cos\alpha + 2a\sin\alpha - 2af\cos\alpha + x = 0.$$

Équilibre sans frottement. — Faisant $f = 0$, on a

$$x = 8a \sin\alpha = 0,8a,$$
$$d = -\frac{x + 2a\sin\alpha}{2\cos\alpha} = -0,5a,$$

en prenant approximativement $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ égaux à 0,1 et à 0,9.

La réaction est placée du côté du disque à peu près à égale distance du disque et du centre de la plaque.

Équilibre avec frottement. — Il suffit que l'on ait $|f| < 0,1$.

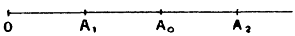
Or on a

$$x = (0,8 - 3,6f)\,a,$$
$$d = \frac{3,6f - 0,8 + 1,8f - 0,2}{1,8}\,a = \frac{5,4f - 1}{1,8}\,a.$$

On tire de là le Tableau des positions d'équilibre

$$f = -0,1,\qquad d = -0,8a,\qquad x = 1,16a,$$
$$f = 0,\qquad d = -0,5a,\qquad x = 0,8a,$$
$$f = +0,1,\qquad d = -0,3a,\qquad x = 0,44a.$$

Sur une droite prenons OA_1, OA_0, OA_2 respective-



ment égaux aux valeurs de x, on peut dire que, si le sommet C de la plaque :

Est entre A_1 et A_0, la plaque est en équilibre et tend à descendre puisque f est positif;

Est entre A_0 et A_2, la plaque est en équilibre et tend à remonter puisque f est négatif.

En dehors de l'intervalle $A_1 A_2$ il n'y a pas équilibre, parce que le coefficient de frottement n'est que de $\frac{1}{10}$.

En prenant les moments par rapport aux sommets C ou D de la plaque, situés sur Ox, on voit que la plaque n'est jamais dans le cas de basculer dans ses positions d'équilibre. Le calcul est facile.

Mouvement sans frottement. — Soit M la masse de la plaque, de sorte que $P = Mg$, on aura, d'après le principe du centre de gravité, et d'après celui des aires, et en changeant le signe de d,

$$N = P\cos\alpha,$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P\sin\alpha + K - \frac{Px}{4a} - Nf,$$

$$Nd + Nf \times 2a = \frac{Px}{4a} \times 2a + Ka.$$

Le disque glissant, puisqu'il n'y a pas de frottement, on a, pour le mouvement du disque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -K + P\sin\alpha;$$

on tire de ces équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{8a}(8a\sin\alpha - x),$$

d'où

$$x = 8a\sin\alpha\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{8a}}\,t\right),$$

en tenant compte des conditions initiales. On voit que, quand t augmente, x augmente, c'est-à-dire que la plaque descend. Sa vitesse est nulle au temps $t = \pi\sqrt{\frac{8a}{g}}$, alors $x = 16a\sin\alpha = 1{,}6a$. Cette position étant différente du point A_0, il n'y a pas équilibre. D'ailleurs, il n'y a pas lieu de rechercher si la plaque bascule. La plaque remonte donc et le mouvement devient oscillatoire.

Mouvement avec frottement. — Faisons une hypothèse. Supposons que le disque roule sans glisser. Appelons N' la réaction normale sur le disque, et f' le coefficient de frottement du disque sur la droite Ox. Nous aurons les équations

$$N' = P\cos\alpha,$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P\sin\alpha - N'f' - K,$$

$$M\frac{a^2}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = N'f' \times a,$$

et, comme le disque roule, on a

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = 2N'f',$$

d'où l'on déduit, avec les équations du mouvement de la plaque,

$$2N'f' = P\sin\alpha - N'f' - K,$$

$$2N'f' = P\sin\alpha + K - \frac{Px}{4a} - Nf,$$

$$f' = \frac{2\sin\alpha - f\cos\alpha - \dfrac{x}{4a}}{5\cos\alpha}.$$

Il faut que f' soit inférieur à 0,1 en valeur absolue Or, à l'instant initial, on a

$$f' = \frac{0,2 - 0,09}{4,5} = 0,02;$$

donc l'hypothèse est fondée au début. On peut donc écrire sans risques

$$5N'f' = 2Mg\sin\alpha - \frac{Px}{4a} - Mfg\cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{5}\left(2\sin\alpha - f\cos\alpha - \frac{x}{4a}\right).$$

On a en intégrant, et dans les circonstances proposées,

$$x = 4a(2\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{10a}}\,t\right).$$

La plaque commence à descendre, et le disque suit en roulant autour de son centre. Ce mouvement persiste jusqu'à ce que $|f'| = 0,1$. Or

$$f' = \frac{0,44a - x}{18a};$$

donc, déjà tant que $x < 0,44\,a$, f' reste inférieur à $0,1$. Ensuite, il faudra que l'on ait

$$x < 0,44a + 0,1 \times 18a \qquad \text{ou} \qquad x < 2,24a.$$

Or, l'équation du mouvement nous montre que la plus grande valeur de x est atteinte au temps $t = \pi\sqrt{\frac{10a}{g}}$ et est égale à $8a\cos\alpha(2\tan\alpha - f)$ ou $0,72a$.

Donc, le même mouvement persiste jusqu'à cette valeur de x. Mais cette valeur est dans le Tableau des positions d'équilibre. Donc le système s'arrête après ce temps. L'équilibre est alors très stable. Car cette position est voisine de celle où il y aurait équilibre, même sans frottement.

Épreuve pratique. — *Deux bassins sont en communication par un tuyau horizontal de* 10^{cm} *de diamètre et de* 2^{km} *de long.*

La surface libre du premier bassin est à 10^{m} *au-dessus du tuyau et la surface libre du deuxième bassin est à* 5^{m} *au-dessus du tuyau.*

Sur ce tuyau, à égale distance des deux bassins, est branché un deuxième tuyau de 5^{cm} *de diamètre et de*

4^{km} *de long. L'extrémité de ce dernier tuyau est à* 10^{m} *au-dessous du tuyau horizontal.*

Examiner si le bassin inférieur recevra ou enverra de l'eau.

Dire quel sera le débit du tuyau inférieur.

Donner les niveaux piézométriques dans les tuyaux.

Certificat d'Astronomie.

Composition. — *Théorie de l'aberration de la lumière d'après Bradley.*

Établir les formules qui font connaître l'effet de l'aberration annuelle :

1° *En ascension droite et en déclinaison ;*

2° *En longitude et en latitude.*

En déduire l'effet de l'aberration diurne en ascension droite et en déclinaison.

On ne parlera pas de l'aberration planétaire.

Épreuve pratique. — *Étant données la durée* T *de la révolution sidérale d'une planète et l'excentricité* e *de son orbite, on demande de calculer l'anomalie excentrique* E, *à l'époque* $t_0 + t$, t_0 *désignant l'époque du passage au périhélie.*

Données numériques

$$T = 1686^{j},640,$$
$$t = 637^{j},473,$$
$$e = 0,2370266,$$

T *et* t *sont exprimés en jours solaires moyens.*

Solution.

Appelant μ le moyen mouvement diurne, M l'anomalie moyenne,

$$\mu = \frac{1296000''}{1686,640}, \qquad M = \mu t, \qquad E - \frac{e}{\sin 1''}\sin E = M, \qquad \Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e\cos E}.$$

Log	
1296000	6,1126050
637,473	2,8044618
1 : 1686,640	$\bar{4}$,7729776
M	5,6900444
e	$\bar{1}$,3747971
1 : sin 1″	5,3144251
e : sin 1″	4,6892222
sin M	$\bar{1}$,842
e'' sin M	4,531
sin E_1	$\bar{1}$,7586
e'' sin E_1	4,4478
sin E_2	$\bar{1}$,7692
e'' sin E_2	4,4584
sin E_3	$\bar{1}$,7686966
e'' sin E_3	4,4579188
ΔM	—1,68726
1 — e cos E	0,07624
cos E	—$\bar{1}$,90823
— e cos E	+$\bar{1}$,28303
ΔE	—1,61102
sin E_4	$\bar{1}$,7688151
e'' sin E_4	4,4580373
sin E_5	$\bar{1}$,7688150
e'' sin E_5	$\bar{1}$,4580372

$$M = E - (4,6892222)\sin E = 489828'',89 = 136^\circ 3' 48'',89$$

	E	e'' sin E	E — e'' sin E	— ΔM = E — e sin E — M
E_1	145°	7° 46′	137° 11′	+ 1° 14′
E_2	144°	7° 59′	136° 1′	— 4
E_3	144° 3′ 0″.00	7° 58′ 22″,44	136° 4′ 37″,56	+ 0′ 48″,67
ΔE_3	—40″.83			
E_4	144° 2′ 19″,17	7° 58′ 30″,27	136° 3′ 48″,90	+ 0″,01

RÉSULTAT.

$$E = 144^\circ 2' 19'',16$$

CERTIFICAT D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

COMPOSITION. — 1° *On forme avec des quantités réelles l'expression*

$$A_1 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3),$$

ainsi que deux autres quantités analogues A_2 *et* A_3 *en permutant les indices. On pose ensuite*

$$\int \left(\frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \frac{A_3}{z - a_3} \right)^2 dz = X + Y\sqrt{-1} = Z,$$

l'intégrale étant calculée le long d'un chemin quelconque décrit dans son plan par la variable indépendante $z = x + y\sqrt{-1}$. *Montrer* a priori *que cette intégrale n'a aucun terme transcendant et calculer ensuite* X *et* Y *en fonction de* x *et de* y.

2° *Vérifier que le rapport* $\frac{dZ}{dz}$ *est une quantité rationnelle en* z, *et, en combinant ce rapport avec celui qu'on obtient en changeant le signe de* $\sqrt{-1}$, *conclure que si l'on considère deux courbes correspondantes décrites dans leurs plans respectifs par les deux points* Z *et* z, *le rapport* $\frac{dS}{ds}$ *des arcs élémentaires* dS *et* ds *de ces courbes est une quantité réelle rationnelle en* x *et* y.

3° *Si les cosinus directeurs de l'arc* S *s'expriment rationnellement en* X *et* Y, *il en sera de même des cosinus directeurs de l'arc* s *qui s'exprimeront rationnellement en* x *et* y.

Pour la solution de la question d'analyse dans ses parties intéressantes, voir *une Note de M. P. Appell, insérée au numéro de novembre* 1896 *dans les* Nouvelles Annales, *sous le titre* Exercice sur les courbes de direction.

Épreuve pratique. — *On considère la suite des plans perpendiculaires à une même droite, et l'on définit la position de chacun de ces plans par sa distance z à une origine fixe prise sur la droite.*

On considère ensuite une surface telle que chacun des plans précédents la coupe suivant une courbe fermée dont l'aire ait pour expression le trinome du second degré à coefficients constants

$$az^2 + bz + c.$$

1° *Calculer le volume* V *compris entre la surface et deux des plans, connaissant la distance h de ces deux plans, l'aire σ de la section faite par un plan équidistant des deux plans donnés et le seul coefficient a du trinome.*

2° *De la formule trouvée pour* V *tirer la valeur de h exprimée en radicaux, dans le cas seulement où le coefficient a est positif.*

3° *Faire le calcul de h, sachant que l'on a*

$$a = +12, \qquad V = 488^{\text{mc}}, \qquad \sigma = 240^{\text{mq}}.$$

Solution.

On doit appliquer la formule de Cardan à l'équation du troisième degré

$$ah^3 + 12\sigma h - 12V = 0.$$

On trouve dans l'exemple numérique

$$h = 2^{\text{m}}.$$