Nouvelles annales de mathématiques

L. Ripert

Sur l’application du principe de dualité aux théorèmes de géométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 446-461
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__446_0>

[P2a]

SUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE DUALITÉ AUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE;

Par M. L. RIPERT,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Généralités et définitions.

1. Dans un plan S, tout théorème projectif a un corrélatif, résultant de la corrélation du point et de la droite, qui entraîne toutes les autres. Mais, en outre, il y a *corrélation directe* d'une figure tracée dans le plan S avec une figure de l'espace rayonnant autour d'un point S. Les principaux éléments de cette seconde corrélation sont indiqués en regard par le Tableau suivant :

Dans le plan S.	*Autour du sommet* S.
Point (d'intersection de deux droites).	Plan (de jonction de deux droites).
Droite (de jonction de deux points).	Droite (d'intersection de deux plans).
Droite d'intersection du plan S et d'un plan M. En particulier, la droite de l'infini I est l'intersection de S et du plan de l'infini. Le corrélatif de la droite I, *dans le plan* S, est un point arbitrairement choisi O, que j'appellerai *origine*.	Droite de jonction du point S et d'un point M. En particulier, une *droite spéciale* J est la ligne de jonction de S et du point choisi arbitrairement comme corrélatif du plan de l'infini. Le corrélatif de la droite J, *autour du sommet* S, est un plan arbitrairement choisi O, que j'appellerai *plan originel*.
Triangle, ses sommets, ses côtés.	Trièdre, ses faces, ses arêtes.
Courbe du n^e ordre, ses points, ses tangentes, etc.	Cône de n^e classe, ses plans tangents, ses génératrices, etc.

Je me borne, pour le moment, à ces indications, suffisantes pour les transformations purement descriptives, que j'examinerai d'abord. D'autres définitions seront nécessaires pour les théorèmes dans lesquels interviennent des éléments *conjugués* (par rapport à une conique ou un cône [1])], puis des éléments *moyens* et enfin des éléments *métriques*.

2. De même que la première partie du Tableau fait ressortir la corrélation de la droite et du point dans le plan S, de même, la seconde partie montre une *corrélation spéciale* (à la géométrie autour de S) entre la droite et le plan.

Ceci posé, soit un théorème a du plan S; il lui correspond, dans ce plan, un théorème corrélatif b, puis, autour du point S, un second théorème corrélatif c; enfin, au théorème b du plan S correspond, autour de S, un corrélatif d, qui est en outre le corrélatif *spécial* de c.

Il est donc possible de quadrupler tout théorème projectif du plan ou, en d'autres termes, d'en déduire un groupe de quatre théorèmes *associés*.

Les exemples suivants, que l'on peut multiplier indéfiniment, ne laisseront aucun doute sur la généralité et l'efficacité de l'application. J'emploierai, pour les quatre énoncés, les mêmes notations qui auront ainsi, dans un même groupe, des significations distinctes mais corrélatives. Les lettres a, b, c, d indiqueront toujours l'ordre de corrélations défini ci-dessus.

---

[1] Le mot *cône* désignera, à moins d'indication contraire, un cône du 2e degré (2e ordre et 2e classe).

Exemples de corrélations purement descriptives.

3. *a* et *b*. Deux triangles du plan S sont dits *homologiques* si les droites de jonction des sommets correspondants concourent en un même point (*centre d'homologie*). Les intersections des côtés correspondants sont alors sur une même droite (*axe d'homologie*) et réciproquement.

c et *d*. Deux trièdres de même sommet S seront dits *homologiques* si les droites d'intersection des faces correspondantes sont dans un même plan (*plan d'homologie*). Les plans de jonction des arêtes correspondantes se coupent alors suivant une même droite (*droite d'homologie*), et réciproquement.

4. *a*. Si, dans le plan S, on joint les sommets A, B, C d'un triangle à deux points quelconques D_1 et D_2, et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les points d'intersection des droites ainsi obtenues avec une conique quelconque circonscrite à ABC, les droites de jonction A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un triangle qui est homologique à ABC [théorème de M. Jérabek, *Mathesis*, p. 204; 1888 [1]].

b. Si, dans le plan S, on coupe les côtés A, B, C d'un triangle par deux droites quelconques D_1 et D_2, et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les secondes tangentes menées par les points ainsi obtenus à une conique quelconque inscrite à (A, B, C), les points d'intersection

---

[1] Le théorème de M. Jérabek a donné naissance à un article très important de M. Neuberg, *Sur les transformations quadratiques involutives* (*Mathesis*, p. 177; 1888). Cet article *tout entier* est susceptible d'être quadruplé par dualité. Je me propose de revenir sur ce sujet.

A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un triangle qui est homologique avec (A, B, C) (*Mathesis, loc. cit.*).

c. Si l'on coupe les faces A, B, C d'un trièdre de sommet S par deux plans quelconques D_1, D_2 (passant par S) et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les seconds plans tangents menés par les droites ainsi obtenues à un cône quelconque inscrit au trièdre (A, B, C), les droites d'intersection A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un trièdre qui est homologique avec (A, B, C).

d. Si l'on joint par des plans les arêtes A, B, C d'un trièdre de sommet S à deux droites quelconques D_1, D_2 (passant par S) et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les secondes génératrices d'intersection des plans ainsi obtenus avec un cône quelconque circonscrit au trièdre ABC, les plans de jonction A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un trièdre qui est homologique avec ABC.

5. *Remarque*. — Le théorème *d*, corrélatif de *b*, est un corollaire de *a* par perspective, et de même le théorème *c*, corrélatif de *a*, est un corollaire perspectif de *b*. Cette remarque, qui peut être répétée pour les exemples suivants, montre la liaison intime des quatre théorèmes d'un groupe. En outre, avec le principe de dualité, un théorème *initial* étant démontré, les trois théorèmes *associés* n'ont plus besoin d'autre démonstration que la vérification de la corrélation des énoncés.

Exemples de corrélation avec éléments conjugués.

6. Il est nécessaire de rappeler et préciser d'abord des définitions connues :

a et *b*. Dans le plan S, et quelle que soit l'origine O, le *centre* de toute conique est le pôle de la droite I de l'infini. Et réciproquement, la droite de l'infini est la polaire de tout centre de conique.

c et *d*. Autour du sommet S, et quel que soit le plan originel O, le plan polaire de la droite spéciale J sera dit *plan central* de tout cône. Et réciproquement J est la polaire de tout plan central de cône.

On observera, ce qui est une conséquence de la corrélation *spéciale*, que, dans la géométrie autour du point, un plan n'a pas un pôle, mais une *polaire;* et réciproquement une droite a un *plan polaire*.

7. *Remarque*. — On sait que les couples de diamètres conjugués d'une conique déterminent, autour du centre, une involution dont les asymptotes (*r* ou *i*) sont les *droites doubles* et que leurs points à l'infini déterminent, par suite, sur la droite de l'infini, une involution dont les points à l'infini de la conique sont les *points doubles*. De même, les couples de diamètres conjugués d'un cône situés dans le plan central déterminent, autour du sommet, une involution dont les asymptotes de la section du cône par ce plan sont les *droites doubles,* et leurs plans conjugués passant par la droite spéciale J déterminent autour de cette droite une involution dont les plans tangents au cône passant par J sont les *plans doubles*. Ces considérations justifient les expressions de *droites doubles* et *points doubles* d'une conique, *droites doubles* et *plans doubles* d'un cône qu'il sera commode d'employer comme synonymes d'asymptotes et éléments corrélatifs ; elles dispenseront de la nécessité de recourir à trois mots nouveaux.

8. *a* et *b*. Dans le plan S, deux droites sont dites *conjuguées* par rapport à une conique si elles sont parallèles à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire si elles

joignent un point arbitraire avec les points sur la droite I de l'infini de deux diamètres conjugués. Deux points sont dits *conjugués* s'ils sont les intersections de deux diamètres conjugnés et d'une droite arbitraire du plan S.

c et *d*. Deux droites (issues de S) seront dites *conjuguées* par rapport à un cône de sommet S si elles sont les intersections d'un plan arbitraire passant par S par deux plans diamétraux conjugués passant par la droite spéciale J. Deux plans (passant par S) seront dits *conjugués* par rapport au cône s'ils sont les plans de jonction de deux diamètres conjugués et d'une droite arbitraire issue de S.

Il résulte de ces définitions que l'on peut toujours : 1° dans le plan S, mener par un point donné la conjuguée d'une droite donnée et prendre sur une droite donnée le conjugué d'un point donné; 2° autour du sommet S, mener dans un plan donné la conjuguée d'une droite donnée et, par une droite donnée, le plan conjugué d'un plan donné.

9. *Remarque*. — Il importe de ne pas confondre, dans le plan S, les *droites conjuguées* ou *points conjugués*, qui viennent d'être définis, avec les (droites) *polaires conjuguées,* telles que le pôle de l'une soit sur l'autre, ou les (points) *pôles conjugués,* tels que la polaire de l'un passe par l'autre. Les éléments corrélatifs autour de S sont : les *droites polaires conjuguées* telles que le plan polaire de l'une passe par l'autre, et les *plans polaires conjugués* tels que la polaire de l'un soit dans l'autre.

On remarquera que toutes les définitions qui précèdent sont absolument indépendantes de l'origine O ou du plan originel O. Il n'en est pas de même des suivantes.

10. *a* et *b*. Deux coniques du plan S sont *concentriques* si elles ont le même pôle de la droite I de l'infini, corrélative de l'origine. Elles seront dites *conpolaires* si elles ont la même polaire de l'origine O, corrélative de I.

c et *d*. Deux cônes (de même sommet S) seront dits *quasi conpolaires* s'ils ont le même plan polaire de la droite spéciale J, corrélative spéciale du plan originel O. Ils seront dits *quasi concentriques* s'ils ont la même polaire du plan originel O, corrélatif spécial de J.

11. *a* et *b*. Deux coniques sont *homothétiques* si elles coupent la droite I de l'infini aux mêmes points (*r* ou *i*). Elles seront dites *homotangentes* si elles ont les mêmes tangentes (*r* ou *i*) issues de l'origine O.

c et *d*. Deux cônes (de même sommet S) seront dits *quasi homotangents* s'ils ont les mêmes plans tangents (*r* ou *i*) passant par la droite spéciale J. Ils seront dits *quasi homothétiques* s'ils ont les mêmes génératrices (*r* ou *i*) dans le plan originel O.

12. *Remarque*. — Pour les coniques (ou quadriques) conpolaires ou homotangentes, on peut voir la brochure : *La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre* (Gauthier-Villars; 1898). Mais on observera que, pour les cônes *de même sommet*, les mots *conpolaire, concentrique, homothétique* ou *homotangent* n'ont pas la même signification que pour les quadriques quelconques (y compris les cônes *de sommet différent*). Ils définissent des conditions *spéciales à la géométrie autour du point*. C'est ce qui explique l'emploi du préfixe *quasi* pour éviter toute confusion.

Ceci posé, passons à diverses applications.

13. *a*. Dans le plan S, si, par un point P pris sur

une conique C, on mène deux droites PA, PB conjuguées par rapport à une autre conique C′, la droite AB de jonction des seconds points communs à ces droites et à C passe par un point fixe (théorème de Frégier généralisé).

b. Dans le plan S, si, sur une droite P tangente à une conique C, on prend deux points PA, PB conjugués par rapport à une autre conique C′, le point AB d'intersection des secondes tangentes menées par ces points à C décrit une droite fixe.

c. Si, dans un plan P, tangent à un cône C de sommet S, on mène deux droites PA, PB (passant par S) et conjuguées par rapport à un autre cône C′ (de même sommet), la droite AB d'intersection des seconds plans tangents menés par ces droites à C engendre un plan fixe.

d. Si, par une droite P, génératrice d'un cône C, on mène deux plans PA, PB conjugués par rapport à un autre cône C′, le plan AB de jonction des secondes droites communes à ces plans et à C passe par une droite fixe.

14. *a*. Dans le plan S, le lieu des points M par lesquels on peut mener à une conique C deux tangentes conjuguées par rapport à une autre conique C′, est une conique C″, concentrique à C et homothétique à C′ (théorème de Monge généralisé).

b. Dans le plan S, l'enveloppe des droites M déterminées par deux points d'une conique C conjugués par rapport à une autre conique C′, est une conique C″, conpolaire à C et homotangente à C′.

c. Autour du point S, l'enveloppe des plans M déterminés par deux génératrices d'un cône C conjuguées par rapport à un autre cône C′ est un cône C″, quasi conpolaire à C et quasi homotangent à C′.

d. Le lieu des droites M, par lesquelles on peut mener deux plans tangents à un cône C et conjuguées par rapport à un autre cône C′, est un cône C″, quasi concentrique à C et quasi homothétique à C′.

15. On peut appliquer les mêmes procédés de quadruplement aux théorèmes concernant l'hyperbole équilatère ou les polaires conjuguées. Par exemple, le théorème connu : *Le centre d'une hyperbole équilatère se trouve sur le cercle circonscrit à tout triangle polaire conjugué,* donne naissance au groupe suivant :

a. Le centre de toute conique C dont les asymptotes (ou droites doubles, 7) sont conjuguées par rapport à une conique C′ se trouve sur toute conique C″, homothétique à C′ et circonscrite à un triangle polaire conjugué (par rapport à C).

b. La polaire de l'origine, par rapport à toute conique C, dont les points doubles sont conjugués par rapport à une conique C′, est tangente à toute conique C″, homotangente à C′ et inscrite à un triangle polaire conjugué (par rapport à C).

c. Le plan central de tout cône C, dont les droites doubles sont conjuguées par rapport à un autre cône C′, est tangent à tout cône C″, quasi homotangent à C′ et inscrit à un trièdre polaire conjugué (par rapport à C).

d. La polaire du plan originel, par rapport à tout cône C dont les plans doubles sont conjugués par rapport à un cône C′, est génératrice de tout cône C″, quasi homothétique à C′ et circonscrit à un trièdre polaire conjugué (par rapport à C).

16. Pour transformer des théorèmes concernant la parabole, il faut tenir compte des conditions ci-après : 1° la parabole est une conique tangente à la droite J de l'infini ; 2° sa corrélative, dans le plan, est une conique quelconque passant par l'origine ; 3° le premier cône (corrélatif direct) est tangent au plan originel ; 4° le deuxième cône (corrélatif spécial) admet pour génératrice la droite spéciale J.

On peut même trouver ainsi des corrélations inattendues. Par exemple, les théorèmes du point de Frégier pour une conique quelconque et de la directrice d'une parabole considérée comme sa ligne orthoptique ou droite de Monge, paraissent indépendants. Mais si, après les avoir énoncés convenablement, on les généralise par homographie, on reconnaît qu'ils sont corrélatifs. En effet, dans le théorème (13, a), la conique C′, n'intervenant que par ses directions conjuguées, peut avoir son centre en un point arbitraire du plan. On peut donc énoncer ainsi ce théorème :

a'. Étant données une conique C passant par un point origine O et une conique C′ dont O est le centre (ou pôle de I), l'enveloppe D des droites de jonction des points A et B de C conjugués par rapport à C′ est un point (ligne de 1re classe). Le corrélatif est : .

b'. Étant données une conique C tangente à la droite I (ou parabole) et une conique C′ dont la polaire du centre est I (c'est-à-dire une conique quelconque), le lieu D des points d'intersection des tangentes A et B à C conjuguées par rapport à C′ est une droite (ligne du premier ordre).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les théorèmes c' et d'.

Exemples de corrélation avec éléments moyens.

17. Je me bornerai aux définitions nécessaires pour arriver à un exemple caractéristique : le quadruplement du théorème du cercle d'Euler.

a. Le milieu d'un segment AB d'une droite D est le centre des moyennes distances, ou, par abréviation, le *point moyen* du couple de points (A, B). Il est le conjugué harmonique du point à l'infini de D, ou, plus simplement, le conjugué de ce point par rapport au couple (A, B) considéré comme courbe de deuxième classe.

b. La conjuguée de la droite de jonction de l'origine O avec un point D, par rapport à un couple (A, B) de droites passant par D, lequel constitue une courbe du deuxième ordre, sera dite la *droite moyenne* du couple (A, B).

c. Le plan conjugué du plan de jonction d'une droite D (passant par S) avec la droite spéciale J, par rapport à un couple (A, B) de plans passant par D et considéré comme cône du deuxième ordre, sera dit le *plan moyen* du couple (A, B).

d. La droite conjuguée de la droite d'intersection du plan originel O avec un plan D passant par S, par rapport à un couple (A, B) de droites issues de S et situées dans le plan D, ce couple étant considéré comme un cône (spécial par perspective) de deuxième classe, sera dite la *droite moyenne* du couple de droites (A, B).

18. *a*. Les droites (qui seront dites *quasi-hauteurs*), conjuguées par rapport à une conique Σ, des côtés d'un triangle et menées par les sommets opposés, se coupent en un point H, qui sera dit *quasi-orthocentre* du triangle.

b. Les points (corrélatifs des quasi-hauteurs et qui, par abréviation, seront dits *points-hauteurs*) conjugués par rapport à une conique Σ des sommets d'un triangle et situés sur les côtés opposés, sont sur une même droite H, que j'appellerai l'*orthocentrale* du triangle.

c. Autour du sommet S, les droites (qui seront dites *quasi-hauteurs* du trièdre), conjuguées par rapport à un cône Σ des arêtes d'un trièdre et situées dans les faces opposées sont dans un même plan H, que j'appellerai le *plan orthocentral* du trièdre.

d. Les plans (qui seront dits *plans-hauteurs*), conjugués par rapport à un cône Σ des faces d'un trièdre et passant par les arêtes opposées, se coupent suivant une même droite H, que j'appellerai la *droite orthocentrale* du trièdre.

Les théorèmes d'Euler, Feuerbach, etc. donnent dès lors naissance au groupe suivant :

19. *a*. Les points moyens des couples de sommets (A, B, C) d'un triangle, les points d'intersection de ses côtés avec les quasi-hauteurs par rapport à une conique *circonscrite* Σ de centre K, les points moyens des couples (H, A), (H, B), (H, C), sont neuf points d'une même conique Σ', homothétique à Σ et dont le centre K′ est le point moyen du couple (H, K). Cette conique Σ' touche les quatre coniques (*r* ou *i*), inscrites au triangle ABC et homothétique à Σ (et Σ'); elle est le lieu des centres des coniques circonscrites à ABC et dont les droites doubles (ou asymptotes) sont conjuguées par rapport à Σ, coniques qui passent toutes par le quasi-orthocentre H, etc.

b. Les droites moyennes des couples de côtés (A, B, C) d'un triangle, les droites de jonction avec les sommets opposés des points hauteurs par rapport à une conique *inscrite* Σ dont K est la polaire de l'origine, les droites moyennes des couples (H, A), (H, B), (H, C) sont neuf droites tangentes à une même conique Σ', homotangente à Σ, dont la polaire K′ de l'origine est la droite moyenne du couple (H, K). Cette conique Σ' touche les quatre coniques (r ou i), circonscrites au triangle (A, B, C) et homotangentes à Σ. Elle est l'enveloppe des polaires de l'origine par rapport aux coniques inscrites à (A, B, C) et dont les points doubles sont conjugués par rapport à Σ, coniques qui touchent toutes l'orthocentrale H du triangle, etc.

c. Les plans moyens des couples de faces (A, B, C) d'un trièdre, les plans de jonction avec les arêtes opposées des quasi-hauteurs par rapport à un cône *inscrit* Σ dont K est le plan central, les plans moyens des couples (H, A), (H, B), (H, C), sont neuf plans tangents à un même cône Σ', quasi-homotangent à Σ, dont le plan central K' est le plan moyen du couple (H, K). Ce cône Σ' touche les quatre cônes (r ou t) circonscrits au trièdre (A, B, C) et quasi homotangents à Σ; il est l'enveloppe des plans centraux des cônes inscrits au trièdre (A, B, C) et dont les droites doubles sont conjuguées par rapport à Σ, cônes qui touchent tous le plan orthocentral H, etc.

d. Les droites moyennes des couples d'arêtes (A, B, C) d'un trièdre, les droites d'intersection des faces avec les plans hauteurs par rapport à un cône Σ *circonscrit* à ABC, dont la polaire du plan originel est K, les droites moyennes des couples (H, A), (H, B), (H, C) sont neuf génératrices d'un même cône Σ', quasi homothétique à Σ, la polaire K' du plan originel étant la droite moyenne du couple (H, K). Ce cône Σ' touche les quatre cônes (r ou i) inscrits au trièdre ABC et quasi homothétiques à Σ. Il est le lieu des polaires du plan originel par rapport aux cônes circonscrits à ABC et dont les plans doubles sont conjugués par rapport à Σ, cônes qui admettent tous pour génératrice la droite orthocentrale H, etc.

20. Les exemples qui précèdent suffisent pour mon-

trer le parti que l'on peut tirer du principe de dualité pour la transformation des théorèmes projectifs, en comprenant sous cette dénomination non seulement les théorèmes purement descriptifs, mais tous ceux dans lesquels interviennent des éléments rectangulaires ou conjugués, des milieux, des bissectrices, etc. Le point de départ de la généralisation des *bissectrices* est évident : il suffit de remarquer que les bissectrices d'un couple de droites étant ses axes (c'est-à-dire les diamètres à la fois conjugués par rapport au couple et à un cercle) sont un cas particulier d'un système de diamètres (r ou i) à la fois conjugués par rapport au couple et à une conique quelconque.

Bien d'autres considérations resteraient à présenter avant d'aborder les questions *métriques*. Je me bornerai à quelques indications sommaires sur un moyen important de généralisation homographique.

Généralisation des théorèmes initiaux.

21. Si l'on en excepte les propriétés purement descriptives (3, 4), *les théorèmes initiaux* (a) *ne sont pas des théorèmes généraux*. En effet, la notion des coniques homotangentes est générale, parce qu'elle considère une famille de coniques tangentes à deux droites quelconques données (r ou i), se croisant en une origine arbitraire (et par conséquent *générale*). Mais il n'en est pas de même pour les coniques homothétiques, famille de coniques passant toutes par deux points J_1 et J_2 (r ou i) donnés sur la droite *particulière* I de l'infini. L'homographie permet de substituer aux points J_1 et J_2 deux points arbitraires M_1 et M_2 (r ou i) d'une droite *générale* Δ et de constituer ainsi une famille de coniques (que l'on pourrait appeler *homoponctuelles*) et qui sont les vraies corrélatives des coniques homotangentes.

Le point moyen du couple (A, B), conjugué du point d'intersection de AB avec la droite particulière I, est un cas particulier du conjugué par rapport à ce couple du point d'intersection de AB avec Δ.

Deux diamètres conjugués sont les droites joignant le pôle de I à deux points L_1 et L_2 de l'involution dont J_1 et J_2 sont les points doubles; ce sont deux *polaires conjuguées* dont les pôles L_1 et L_2 sont sur I; deux droites conjuguées joignent un point arbitraire aux points L_1 et L_2. Par suite, deux diamètres conjugués sont un cas particulier de deux *polaires conjuguées* dont les pôles N_1 et N_2 sont des points de l'involution portée par Δ et ayant M_1 et M_2 pour points doubles; deux droites conjuguées sont un cas particulier de deux droites joignant un point arbitraire du plan aux pôles conjugués N_1 et N_2, situés sur Δ.

22. Ceci posé, laissant au lecteur le soin de définir les éléments corrélatifs des précédents et d'énoncer les nouveaux théorèmes *b*, *c*, *d*, on voit, par exemple, que :

1° Le théorème (**14**, *a*, Monge) se généralise ainsi : étant données une droite Δ, une conique C ayant K pour pôle de Δ et une conique C′ coupant cette droite en M_1 et M_2, le lieu des points M par lesquels on peut mener à C deux tangentes telles que leurs points d'intersection N_1, N_2 avec Δ soient pôles conjugués par rapport à C′, est une conique C″, ayant K pour pôle de Δ et homoponctuelle à C′ (c'est-à-dire passant par M_1 et M_2).

2° Le théorème (**19**, *a*, Euler et Feuerbach) est un cas particulier du suivant : Étant donné un triangle ABC et une conique Σ circonscrite et coupant la droite donnée Δ aux points (r ou i) M_1 et M_2, K étant le pôle de Δ; soient A_1, B_1, C_1 les intersections des côtés avec Δ, et A_2, B_2, C_2 les conjugués de ces points par rapport aux couples de sommets :

La conique $(A_2B_2C_2M_1M_2)$ ou Σ' coupe les côtés en des points A_3, B_3, C_3 tels que les droites AA_3, BB_3, CC_3 (qui concourent en un point H) rencontrent Δ en des points A_4, B_4, C_4, pôles respectivement conjugués par rapport à Σ de A_1, B_1, C_1. Les seconds points communs à AA_3, BB_3, CC_3 et à Σ' sont les conjugués des points d'intersection de Δ avec ces droites par rapport aux couples (H, A), (H, B), (H, C). Le pôle K' de Δ par rapport à Σ' est le conjugué du couple (H, K) par rapport au point d'intersection de HK et de Δ. La conique Σ' touche les quatre coniques (r ou i) tangentes aux côtés de ABC et homoponctuelles à Σ et Σ' (c'est-à-dire passant par M_1, M_2), etc.

23. Il resterait à étudier les théorèmes qui comportent des *relations métriques* et qui, jusqu'à présent, ont semblé mettre en défaut la généralité d'application du principe de dualité. On peut cependant arriver à cette application en faisant usage des principes dont j'ai exposé les bases dans une brochure précitée. Mais ces bases ont besoin d'être développées et précisées. Ce sera l'objet d'un prochain article.