NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur les fonctions elliptiques de première espèce

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 367-385

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__367_1>

[F2a]

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE [1];

PAR M. E. IAGGI.

Dans les nombreuses études des fonctions elliptiques qui ont été faites depuis Abel et Jacobi jusqu'à ce

(1) Cette Note est un extrait, complété sur quelques points par l'auteur, des *Recherches sur la theorie des fonctions*, par E. IAGGY. Besançon, 1897. E. I.

jour, on considère comme types de ces fonctions les trois suivantes :

1° $\operatorname{sn} x$, qui a pour substitutions

$$4mK + 2niK' + x \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$2(2m+1)K + 2niK' - x.$$

2° $\operatorname{cn} x$, qui a pour substitutions

$$4mK + 2n(K + iK') \pm x.$$

3° $\operatorname{dn} x$, dont les substitutions sont

$$2mK + 4niK' \pm x,$$

et l'on considère que $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, qui sont liées par la relation

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1,$$

sont respectivement les analogues des fonctions circulaires $\sin \frac{\pi}{2k} x$ et $\cos \frac{\pi}{2k} x$ dont les substitutions sont respectivement

$$4mK + x,$$
$$2(2m+1)K - x,$$

et

$$4mK \pm x,$$

et qui sont liées par la relation

$$\sin^2 \frac{\pi}{2k} x + \cos^2 \frac{\pi}{2k} x = 1.$$

D'ailleurs, $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ donnent lieu à un théorème d'addition qui se ramène au théorème d'addition des fonctions circulaires lorsqu'on annule k.

Toutefois, l'analogie entre $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ et les fonctions circulaires est loin d'être complète : ainsi, les formules d'addition ne sont rationnelles qu'autant qu'on y introduit $\operatorname{dn} x$, et n'ont pas la même forme que les formules relatives aux fonctions circulaires. De plus $\sin x$ et $\cos x$ satisfont à une même équation différentielle de la forme

$$y'^2 = 1 - y^2,$$

et il n'en est pas de même de $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ qui satisfont à des équations analogues à la précédente, mais différentes entre elles. Enfin, tandis qu'entre $\sin \frac{\pi}{2k} x$ et $\cos \frac{\pi}{2k} x$, existent les relations

$$\sin \frac{\pi}{2k} (k \pm x) = \cos \frac{\pi}{2k} x, \qquad \cos \frac{\pi}{2k} (k \pm x) = \pm \sin \frac{\pi}{2k} x,$$

entre $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ n'existent pas de relations analogues.

Ainsi, sauf la relation $\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1$, identique à la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on ne trouve que des analogies assez lointaines entre les deux premières fonctions elliptiques et les fonctions circulaires. La nécessité de l'introduction d'une troisième fonction $\operatorname{dn} x$ avec $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, pour rendre rationnelles les formules, nécessité qu'on peut expliquer par ce fait que les fonctions elliptiques sont d'ordre supérieur aux fonctions circulaires, montre également que l'analogie est loin d'être complète. On peut penser que l'analogie cherchée ne se présente que pour $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, parce que ces fonctions élémentaires ont été mal choisies et, en effet, de nombreuses recherches ont été faites dans ce sens, tant au point de vue purement analytique qu'au point de vue de la représentation géométrique des fonctions elliptiques. La fonction $p(u)$ de Weierstrass a été inventée dans ce but; mais si l'introduction de cette fonction dans la théorie simplifie quelques calculs, et si cette fonction présente quelques analogies avec les fonctions circulaires, notamment au point de vue des développements en série et en produits infinis, on ne trouve pas dans cette théorie deux fonctions corrélatives comme

$\sin x$ et $\cos x$, et d'autre part l'introduction nécessaire des fonctions σ, dans cette théorie, n'est qu'une modification, sans grand avantage, au point de vue qui nous occupe, des fonctions Θ de Jacobi.

La Note présente a pour but de montrer qu'on pourrait choisir comme éléments de la théorie des fonctions elliptiques, deux fonctions présentant par leurs propriétés analytiques, une analogie complète avec les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, en sorte que cette analogie pourra servir d'indication pour les recherches et les applications ultérieures.

I. Les deux fonctions dont il s'agit sont : la fonction

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}}{\Theta} = \operatorname{sn} x = \sin \operatorname{am} x$$

qui sera l'analogue du sinus, et la fonction

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}_1}{\Theta_1} = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \sin \operatorname{co-am} x$$

qui sera l'analogue du cosinus.

Ces fonctions sont toutes deux connues depuis Jacobi; mais leurs propriétés corrélatives n'ont pas, à notre connaissance, été étudiées jusqu'ici.

Les expressions de u et de v, en fonction des transcendantes Θ, ou des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, permettent d'étudier facilement leurs relations et leurs propriétés, aussi nous contenterons-nous de les énoncer :

1° $u(x)$ et $v(x)$ sont liées par une relation algébrique linéaire en u^2 et v^2

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2 \text{ [1]}.$$

---

[1] Pour certains calculs, il y a avantage à mettre cette relation sous l'une des deux formes

$$(1 - u^2)(1 - v^2) = k'^2 u^2 v^2, \qquad (1 - k^2 u^2)(1 - k^2 v^2) = k'^2.$$

2° $u(0) = 0$, $v(0) = 1$.

3° Les substitutions de u et de v sont respectivement

$$4mK + 2niK' + x \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$2(2m+1)k + 2nik' - x,$$

et

$$4mK + 2niK' \pm x.$$

On les obtient donc, en ajoutant la même période (1) imaginaire $2iK'$, aux substitutions des fonctions circulaires $\sin\frac{\pi}{2K}x$, $\cos\frac{\pi}{2K}x$, qui sont respectivement

$$4mK + x,$$
$$2(2m+1)K - x$$

et

$$4mK \pm x,$$

et ceci n'a pas lieu pour $\mathrm{sn}\,x$ $\mathrm{cn}\,x$, car la période imaginaire de $\mathrm{cn}\,x$ est $2(K + iK')$.

4° Les fonctions u et v satisfont aux relations

$$u(K \pm x) = v(x), \qquad v(K \pm x) = \mp u(x),$$

relations identiques à celles qui lient

$$\sin\frac{\pi}{2K}x, \quad \cos\frac{\pi}{2K}x, \quad \sin\frac{\pi}{2K}(k \pm x), \quad \cos\frac{\pi}{2K}(k \pm x).$$

5° u et v satisfont toutes deux à la même équation différentielle

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2)$$

analogue à l'équation $y'^2 = (1 - y^2)$ à laquelle la précédente se réduit pour $k = 0$ et à laquelle satisfont $\sin x$ et $\cos x$.

---

(1) C'est en partant de cette idée que « les deux fonctions élémentaires cherchées ne devaient différer des sinus et cosinus que par l'introduction d'une même période imaginaire » que nous avons été amené, par notre méthode générale de formation d'une fonction au moyen de son groupe de substitutions, à la considération de $v(x)$.
(*Loc. cit.*)

On a d'ailleurs

$$u'_x = +\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \qquad v'_x = -\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)},$$

formules qui se réduisent, pour $k = 0$, à leurs analogues

$$u'_x = +\sqrt{1-u^2}, \qquad v'_x = -\sqrt{1-v^2},$$

du cas des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$.

On a aussi

$$u'_x = +k'^2\frac{v}{1-k'^2v^2} = +v(1-k^2u^2),$$

$$v'_x = \quad k'^2\frac{u}{1-k^2u^2} = -u(1-k^2v^2),$$

formules rationnelles analogues aux formules

$$u'_x = +v, \qquad v'_x = -u,$$

du cas des fonctions circulaires $u = \sin x$, $v = \cos x$.

6° u et v possèdent un théorème d'addition dont les formules

$$u(x+a) = \frac{u_x v_a - u_a v_x}{1 + k^2 u_x v_x u_a v_a},$$

$$v(x+a) = \frac{v_x v_a - u_x u_a}{1 - k^2 u_x v_x u_a v_a}$$

sont rationnelles [1] et ne contiennent comme éléments que ces deux mêmes fonctions, et présentent une analogie complète avec les formules d'addition des fonctions $u = \sin x$, $v = \cos x$,

$$u(x+a) = u_x v_a + u_a v_x, \qquad v(x+a) = v_x v_a - u_x u_a,$$

auxquelles elles se réduisent pour $k = 0$.

---

[1] On peut donner à ces formules d'autres formes qui peuvent être utiles dans quelques cas

$$u_{x+a} = \frac{u_x v_a + u_a v_x - k^2 u_a u_x (u_x v_x - u_a v_a)}{1 - k^2 u_x^2 u_a^2} = \frac{u_x v_x + u_a v_a}{u_x u_a + v_x v_a}, \quad \ldots$$

De ces formules on tire les formules de multiplication

$$u(2x) = \frac{2u_x v_x}{1+k^2 u_x^2 v_x^2} = \frac{2u_x\sqrt{(1-u_x^2)(1-k^2u_x^2)}}{1-k^2u_x^4}$$
$$= \frac{2v_x\sqrt{(1-v_x^2)(1-k^2v_x^2)}}{1-k^2v_x^4},$$
$$v(2x) = \frac{v_x^2-u_x^2}{1-k^2u_x^2v_x^2} = -\frac{1-2v_x^2+k^2v_x^4}{1-2k^2v_x^2+k^2v_x^4}$$
$$= \frac{1-2u_x^2+k^2u_x^4}{1-2k^2u_x^2+k^2u_x^4},$$
$$u(3x) = \frac{3u_xv_x^2-u_x^3-k^2u_x^3v_x^3(u_x^2+v_x^2)}{1+2k^2u_x^2v_x^2(v_x^2-u_x^2)-k^4u_x^4v_x^4},$$
$$v(3x) = \frac{v_x^3-3u_x^2v_x+k^2u_x^2v_x^3(u_x^2+v_x^2)}{1-2k^2u_x^2v_x^2(v_x^2-u_x^2)-k^4u_x^4v_x^4},$$
. . . . ,

formules analogues aux suivantes

$$u(2x) = 2u_xv_x = 2u_x\sqrt{1-u_x^2} = 2v_x\sqrt{1-v_x^2},$$
$$v(2x) = v_x^2-u_x^2 = -(1-2v_x^2) = 1-2u_x^2,$$
$$u(3x) = 3u_xv_x^2-u_x^3,$$
$$v(3x) = v_x^3-3u_x^2v_x,$$
. . . .

du cas des fonctions circulaires.

On pourra de même former $u(4x)$, $v(4x)$ et arriver à $u(mx)$, $v(mx)$ en opérant de proche en proche à l'aide des formules d'addition.

Les formules obtenues seront toutes rationnelles en u_x, v_x et ne contiendront que ces deux fonctions, et l'on conçoit qu'on pourra, dans une certaine mesure au moins, discuter les valeurs de $u\left(\frac{x}{2}\right)$, $v\left(\frac{x}{2}\right)$, $u\left(\frac{x}{3}\right)$, $v\left(\frac{x}{3}\right)$, ... En particulier, on peut conclure immédiatement de nos formules que $u\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $v\left(\frac{x}{2^n}\right)$ s'expriment par radicaux au moyen des fonctions $u(x)$, $v(x)$.

Des formules d'addition, on tire encore les suivantes ([1])

$$u(x+a)+u(x-a)=+2u_x v_a\,\frac{1-k^2u_a^2v_x^2}{1-k^4u_x^2v_x^2u_a^2v_a^2}$$
$$=+2u_x v_a\,\frac{k'^2}{k'^2+k^2(1-v_a^2)(1-u_x^2)},$$
$$u(x+a)-u(x-a)=+2u_a v_x\,\frac{1-k^2u_x^2v_a^2}{1-k^4u_x^2v_x^2u_a^2v_a^2}$$
$$=+2u_a v_x\,\frac{k'^2}{k'^2+k^2(1-v_x^2)(1-u_a^2)},$$
$$v(x+a)+v(x-a)=+2v_x v_a\,\frac{1-k^2u_x^2u_a^2}{1-k^4u_x^2v_x^2u_a^2v_a^2}$$
$$=+2v_x v_a\,\frac{k'^2}{k'^2-k^2(1-v_a^2)(1-v_x^2)},$$
$$v(x+a)-v(x-a)=-2u_x u_a\,\frac{1-k^2v_x^2v_a^2}{1-k^4u_x^2v_x^2u_a^2v_a^2}$$
$$=-2u_x u_a\,\frac{k'^2}{k'^2+k^2(1-u_x^2)(1-u_a^2)},$$

formules analogues aux suivantes

$$u(x+a)+u(x-a)=+2u_x v_a$$
$$u(x+a)-u(x-a)=+2u_a v_x$$
$$v(x+a)+v(x-a)=+2v_x v_a$$
$$v(x+a)-v(x-a)=-2u_x u_a,$$

auxquelles elles se réduisent pour $k=0$, et qui sont relatives au cas des fonctions circulaires $u=\sin x$, $v=\cos x$.

On peut ajouter à ces propriétés de nos fonctions u et v la suivante

$$u(i\mathrm{K}-x)=\frac{1}{ku(x)},\qquad v(i\mathrm{K}+x)=\frac{1}{kv(x)},$$

([1]) On peut aussi donner à ces formules la forme

$$u(x+a)+u(x-a)=2u_x v_a\,\frac{v_x^2-u_a^2}{v_x^2v_a-u_xu_a},$$
$$u(x+a)-u(x-a)=2u_a v_x\,\frac{v_a-u_x}{v_x^2v_a-u_xu_a^2},$$

qui n'a pas d'analogues dans les fonctions circulaires, car elle est relative à la période imaginaire des fonctions elliptiques et est donc particulière à celles-ci.

Nous avons formé ainsi le Tableau des principales propriétés corrélatives des deux fonctions

$$u = \sin \operatorname{am} x, \qquad v = \sin \operatorname{co-am} x,$$

et l'on voit que ces propriétés sont complètement analogues aux propriétés corrélatives des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$.

Ces propriétés conduisent à penser que toute la théorie des fonctions elliptiques pourrait être édifiée sur les deux seules fonctions u et v, y compris les théories relatives à la multiplication et à la transformation. En effet, si, dans ces théories, il a été jusqu'ici plus simple de se servir des fonctions à multiplicateur, Θ ou σ, cela tenait à ce que les formules en $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ ne sont rationnelles qu'autant qu'on introduit $\operatorname{dn} x$; les peu nombreuses analogies qui existent, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, d'une part, $\sin x$, $\cos x$, d'autre part, sont alors masquées par la présence de $\operatorname{dn} x$; mais une théorie fondée sur nos deux fonctions u et v présenterait une analogie complète avec la théorie des fonctions circulaires; il serait d'ailleurs inutile de faire intervenir les fonctions Θ ou σ dans cette théorie élémentaire, les deux fonctions u et v étant complètement déterminées par les égalités

$$u' = +\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \qquad u(0) = 0,$$
$$v' = -\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}, \qquad v(0) = 1$$

On peut prévoir que toutes les fonctions elliptiques s'exprimeront d'une manière simple par la transformation ou la multiplication de nos fonctions u et v. C'est ce que nous pensons avoir démontré dans l'étude suivante, où nous montrons comment $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$ d'une part, $p(u)$ d'autre part, peuvent être obtenues par la transformation et la multiplication de la fonction $v = \sin \text{co-am}\, x$; comme toute fonction de première espèce s'exprime au moyen de $\mathrm{sn}\, x$, $\mathrm{cn}\, x$, $\mathrm{dn}\, x$ ou de $p(u)$, il s'ensuivra que : *toute fonction de première espèce s'exprime au moyen de nos fonctions u et v ou de leurs transformées.*

II. Considérons les quatre fonctions de Jacobi Θ, H, Θ_1, H_1. On peut former par les rapports de ces fonctions prises deux à deux, douze fonctions elliptiques inverses deux à deux. Nous considérerons les six fonctions suivantes :

$$u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}}{\Theta} = \mathrm{sn}\, x,$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}}{\Theta_1} = k' \frac{\mathrm{sn}\, x}{\mathrm{dn}\, x},$$

$$u_2 = \frac{1}{i\sqrt{k'}} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \frac{\mathrm{sn}\, x}{i\, \mathrm{cn}\, x},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}_1}{\Theta_1} = \frac{\mathrm{cn}\, x}{\mathrm{dn}\, x},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1}{\Theta} = \mathrm{cn}\, x,$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\Theta}{\Theta_1} = \frac{1}{\mathrm{dn}\, x},$$

les six autres n'étant que les inverses de celles-là [1].

Nous allons montrer que u_1 et v_1 d'une part, u_2 et v_2 d'autre part, peuvent être obtenues par multiplication de l'argument et transformation du module de u et de v.

---

[1] Depuis Jacobi, on classe ordinairement ces douze fonctions par groupes de trois, sous les dénominations $\sin \mathrm{am}\, x$, $\cos \mathrm{am}\, x$, $\Delta \mathrm{am}\, x$, etc.; c'est, pensons-nous, ce qui fait que les propriétés corrélatives de ces fonctions, prises deux à deux, ont échappé jusqu'ici à l'attention des mathématiciens.

On a, pour déterminer u_1 et v_1, les équations

$$u'_1 = +\sqrt{(1-u_1^2)(k'^2+k^2u_1^2)}, \qquad u_1(0)=0,$$
$$v'_1 = -\sqrt{(1-v_1^2)(k'^2+k^2v_1^2)}, \qquad v_1(0)=1.$$

Si l'on pose

$$k_1 = \frac{ki}{k'}, \qquad g_1 = k',$$

les équations différentielles précédentes deviennent

$$u'_1 = +g_1\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1u_1^2)},$$
$$v'_1 = -g_1\sqrt{(1-v_1^2)(1-k_1^2v_1^2)},$$

ce qui montre que u_1 et v_1 sont des fonctions analogues à u et v, dans lesquelles l'argument est multiplié par g et le module est k_1 ; par conséquent les fonctions u_1 et v_1 peuvent être obtenues au moyen de u et de v, par les opérations connues sous les noms de *multiplication* et de *transformation*. Les fonctions u_1 et v_1 satisfont donc, avec le module k_1, aux relations qui existent entre u et v. On peut d'ailleurs vérifier directement ces relations. Ainsi :

1° La relation qui lie u_1 et v_1

$$k'^2(u_1^2+v_1^2) = k'^2 - k^2u_1^2v_1^2$$

devient, en posant $\frac{ki}{k'} = k_1$,

$$u_1^2 + v_1^2 = 1 + k_1^2u_1^2v_1^2,$$

relation qui ne diffère que par le changement du module k en k_1 de la relation qui lie u et v

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2u^2v^2.$$

2° Les substitutions qui laissent u_1 invariable sont :

$$4mK + 2n(K+iK') + x,$$
$$2(2m+1)K + 2n(K+iK') - x;$$

celles de v_1 sont

$$4mK + 2n(K + iK') \pm x.$$

Elles ne diffèrent donc de celles de $\sin \frac{\pi}{2K} x$, $\cos \frac{\pi}{2K} x$, que par l'introduction d'une même période imaginaire $2(K + iK')$. Il est à remarquer, au point de vue de la périodicité, que la multiplication et la transformation indiquées de l'argument et du module de u et de v, n'ont fait que changer la période imaginaire $2iK'$ en la période imaginaire $2(K + iK')$.

3° On a

$$u_1(K - x) = v_1(x), \qquad v_1(K - x) = u_1(x).$$

On vérifiera également que u_1 et v_1 ont le même théorème d'addition que u et v.

Considérons maintenant u_2 et v_2. Ces deux fonctions peuvent être considérées comme déterminées par les équations différentielles suivantes, qu'on obtient facilement grâce aux expressions que nous avons données de ces fonctions au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ ou des fonctions Θ

$$u_2' = -i\sqrt{(1 - u_2^2)(1 - k'^2 u_2^2)},$$
$$u_2(0) = 0,$$
$$v_2' = i\sqrt{(1 - v_2^2)(1 - k'^2 v_2^2)},$$
$$v_2(0) = 1.$$

Si donc on pose $g_2 = -i$, $k_2 = k'$, les équations précédentes deviennent

$$u_2' = -g_2\sqrt{(1 - u_2^2)(1 - k_2^2 u_2^2)},$$
$$v_2' = g_2\sqrt{(1 - v_2^2)(1 - k_2^2 v_2^2)},$$

et il s'ensuit que u_2 et v_2 sont obtenues par la transformation du module k en k' et la multiplication de l'argument par $-i$, des fonctions u et v.

Ceci suffit pour affirmer que u_2 et v_2 ont les mêmes propriétés corrélatives que u et v. On peut d'ailleurs vérifier directement ces propriétés au moyen des expressions que nous avons données de u_2 et de v_2.

Ainsi la relation qui lie u_2 et v_2 est

$$u_2^2 + v_2^2 = 1 + k'^2 u_2^2 v_2^2,$$

et s'obtient par le changement de k en k' dans la relation qui lie u et v.

u_2 a pour substitutions

$$4miK' + 2nK + x,$$
$$2(2m+1)iK' + 2nK - x.$$

Celles de v_2 sont

$$4miK' + 2nK \pm x.$$

Ces substitutions ne diffèrent respectivement de celles de $\sin\frac{\pi}{2iK'}x$ et de $\cos\frac{\pi}{2iK'}x$ que par l'introduction de la *même* période réelle $2K$. Il est à remarquer que la multiplication de l'argument par $-i$ et la transformation du module k en k' dans les fonctions u et v n'ont fait que permuter les quantités K et iK' dans les substitutions de ces fonctions.

Enfin l'on a

$$u_2(iK' \pm x) = v_2(x), \qquad v_2(iK' \pm x) = \mp u_2(x).$$

En résumé, les fonctions u_1 et v_1, u_2 et v_2 et, par suite, toutes les fonctions elliptiques de première espèce qu'on pourra considérer pourront être obtenues, au moyen de u et de v, par une transformation et une multiplication convenables. Et, comme les fonctions de deuxième et de troisième espèces peuvent s'exprimer au moyen de celles de première espèce, on voit que nos fonctions u et v suffisent comme éléments de la théorie des fonctions elliptiques.

Si, au point de vue analytique, on appelle *sinus elliptique* et *cosinus elliptique* deux fonctions telles que u et v, on pourra écrire, en mettant en évidence le module et le multiplicateur

$$
\begin{aligned}
u &= \sin_e(k, x) = \operatorname{sn} x,\\
u_1 &= \sin_e\left(\frac{ki}{k'}, k'x\right),\\
u_2 &= \sin_e(k', -ix),\\
v &= \cos_e(k, x),\\
v_1 &= \cos_e\left(\frac{ki}{k'}, k'x\right) = \operatorname{cn} x.\\
v_2 &= \cos_e(k', -ix) = \frac{1}{\operatorname{dn} x},
\end{aligned}
$$

et l'on voit que tout problème sur les fonctions elliptiques pourra être résolu au moyen de deux seules fonctions de la forme

$$\sin_e(k, gx), \qquad \cos_e(k, gx).$$

La transformation

$$u = f(s),$$

qui permettrait de passer d'un sinus elliptique

$$u = \sin_e(k, x)$$

à un autre sinus

$$s = \sin_e(h, gx),$$

est déterminée par les équations différentielles

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \quad [u(0) = s(0) = 0],\\
\frac{ds}{dx} &= g\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = dx = \frac{ds}{g\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)}},$$

d'où

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{(1-u^2)(1-k^2u^2)}{(1-s^2)(1-h^2s^2)}}.$$

Dans cette équation, on peut considérer s comme la variable, u comme la fonction : l'intégrale u de cette équation différentielle est donc la fonction de s cherchée $u = f(s)$; la constante d'intégration est d'ailleurs déterminée par cette condition qu'une valeur de $u = f(s)$ s'annule en même temps que s, car $u = \sin_e(k, x)$, et $s = \sin_e(h, gx)$ s'annulent en même temps pour $x = 0$; mais les autres zéros de $u(x)$ et $s(x)$ ne sont pas généralement communs et la fonction $u = f(s)$ n'est pas généralement une fonction uniforme pas plus que l'inverse de cette fonction.

L'intégrale générale de l'équation différentielle précédente convient également à la transformation de la fonction

$$v = \cos_e(k, x)$$

en la fonction

$$t = \cos_e(h, gx),$$

car on obtient l'équation en v et t, en changeant u en v, s en t dans la précédente. Mais la constante d'intégration n'est plus la même, car elle est ici déterminée par les conditions

$$v(0) = 1 = t(0),$$

c'est-à-dire qu'une valeur de $v = f(t)$ doit devenir égale à l'unité quand la variable t prend elle-même cette valeur. En ne fixant pas la valeur de la constante λ d'intégration, nous pouvons dire que la transformation de u en s et celle de v en t s'obtiennent *toutes deux* par la même fonction de transformation

$$f(\lambda, s) \quad \text{ou} \quad f(\lambda, t),$$

intégrale générale de l'équation différentielle que nous avons donnée plus haut.

Il est intéressant de rechercher ce qu'est la fonction $\frac{u}{v}$, rapport de nos sinus et cosinus elliptiques, car elle est susceptible de simplifier certaines formules, comme cela arrive pour $\operatorname{tang} x$ dans le cas des fonctions circulaires.

On voit facilement que cette fonction ne se distingue pas de u et v par des propriétés particulières, comme le fait $\operatorname{tang} x$ de $\sin x$ et $\cos x$; ses substitutions sont

$$2m(K + iK') + 2niK' + x,$$
$$(2m + 1)(K + iK') + 2niK' - x;$$

$\frac{u}{v}$ est donc, à une transformation linéaire près, *un sinus elliptique* de la forme

$$\sin_e(h, gx).$$

Pour trouver cette transformation ainsi que le module h et le multiplicateur g, posons $w = \frac{u}{v}$ et formons l'équation différentielle en w. On trouve

$$w'^2 = (1 + w^2)^2 - 4k^2 w^2,$$

équation qui, par la transformation

$$w = (k + k'i)z,$$

devient

$$z'^2 = (ki - k')^2(1 - z^2)[1 - (k + k'i)^4 z^2].$$

On a donc

$$z = \sin_e(h, gx),$$

avec

$$g = k - k'i,$$
$$h = (k + k'i)^2,$$

et

$$w = \frac{u}{v} = (k + k'i)\sin_e(h, gx)$$
$$= (k + k'i)\sin_e[(k + k'i)^2, (k - k'i)x].$$

Toutefois, la fonction $\frac{u}{v}$ pourra être utilisée dans les formules contenant u et v, de la même manière que $\tan g x$ est utilisée dans les formules des fonctions circulaires.

Considérons encore la fonction $\wp u$ de Weierstrass, déterminée par les égalités

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \qquad \left(\frac{1}{p(0)} = 0\right).$$

Les substitutions de $\wp u$ sont de la forme

$$2m\omega + 2n\omega' \pm u \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction est donc, à une transformation linéaire près, un *cosinus elliptique*.

Pour trouver cette transformation et ce cosinus, remarquons que ce dernier devient égal à *un* lorsque l'argument s'annule, tandis que $\wp u$ devient infinie. Nous poserons donc

$$\wp u = \frac{a + bt}{1 - t},$$

t étant le cosinus cherché, ou encore

$$\wp u = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)t}{1 - t} = \alpha + \beta\,\frac{1 + t}{1 - t}.$$

Portant cette expression de $\wp u$ dans l'équation différentielle en $\wp(u)$, on trouve aisément que pour que cette équation différentielle se réduise à la forme

$$t'^2 = g^2(1 - t^2)(1 - h^2 t^2),$$

il est nécessaire et suffisant que

$$4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3 = 0,$$
$$4\beta^2 = 12\alpha^2 - g_2:$$

α doit donc être l'une des trois racines désignées par e_1, e_2, e_3 par Weierstrass :

$$\alpha = e_1, e_2, e_3 = p\omega, p\omega'', p\omega' \qquad (\omega'' = \omega + \omega'),$$
$$2\beta = \sqrt{12e^2 - g_2} = \sqrt{2p''(\omega'')}, \sqrt{2p''(\omega)}, \sqrt{2p''(\omega')}$$

(le signe + devant les radicaux est le seul qui convienne).

La transformation cherchée est donc

$$pu = p\omega + \frac{\sqrt{2p''\omega}}{2}\,\frac{1+t}{1-t},$$

où l'on peut remplacer ω par ω', ou ω''.

t est le cosinus elliptique déterminé par l'équation

$$t'^2 = (3p\omega + \sqrt{2p''\omega})(1-t^2)\left(1 - \frac{3p\omega - \sqrt{2p''\omega}}{3p\omega + \sqrt{2p''\omega}}\,t^2\right).$$

Nous l'écrirons donc

$$t = \cos_e\left[\sqrt{\frac{3p\omega - \sqrt{2p''\omega}}{3p\omega + \sqrt{2p''\omega}}},\ (3p\omega + \sqrt{2p''\omega})\,u\right]$$

où ω a la même valeur que plus haut.

Posant $\omega = \omega_1$, $\omega'' = \omega_2$, $\omega' = \omega_3$, nous avons donc pour exprimer pu au moyen du cosinus elliptique dont cette fonction a les substitutions, les trois formules suivantes :

$$pu = p\omega_j + \frac{\sqrt{2p''\omega_j}}{2}\,\frac{1+\cos_e(h_j, g_j u)}{1-\cos_e(h_j, g_j u)}$$
$$(\omega_j = \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3),$$

dans lesquelles on a

$$g_j = \pm(3p\omega_j + \sqrt{2p''\omega_j}),$$
$$h_j = \sqrt{\frac{3p\omega_j - \sqrt{2p''\omega_j}}{3p\omega_j + \sqrt{2p''\omega_j}}}.$$

Nous ne nous étendrons pas davantage sur l'emploi des fonctions que nous venons d'indiquer pour exprimer toutes les fonctions elliptiques. Mais nous nous permettrons de proposer de prendre pour éléments de la théorie des fonctions elliptiques deux fonctions telles que u et v, ce choix devant donner de grandes simplifications tant dans les applications que dans la théorie, notamment dans la formation et l'usage de tables numériques de *sinus* et *cosinus elliptiques,* tables qu'on a essayées sans grand succès jusqu'ici en se servant soit des fonctions $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, soit de la fonction $\wp u$.