NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur un système remarquable de *n* relations entre deux systèmes de *n* quantités

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 317-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__317_1>

[B2a]

SUR UN SYSTÈME REMARQUABLE DE n RELATIONS ENTRE DEUX SYSTÈMES DE n QUANTITÉS;

PAR M. G. FONTENÉ,

Professeur au Collège Rollin.

I.

1. La discussion du système connu d'équations

$$\left\{\begin{aligned} ax + by + cz &= 0,\\ bx + cy + az &= 0,\\ cx + ay + bz &= 0,\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant x, y, z par z, y, x,

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} az+by+cx=0, \\ bz+cy+ax=0, \\ cz+ay+bx=0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} ax+(bz+cy)=0, \\ by+(cx+az)=0, \\ cz+(ay+bx)=0, \end{cases}$$

conduit à ceci. Soient n quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et n autres quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liées par les n relations homogènes

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 x_n+u_2 x_{n-1}+\ldots+u_n x_1 \;\;=0, \\ u_2 x_n+u_3 x_{n-1}+\ldots+u_1 x_1 \;\;=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n x_n+u_1 x_{n-1}+\ldots+u_{n-1} x_1=0, \end{cases}$$

la loi étant que le résidu de la somme des deux indices par rapport au diviseur n est constant dans chaque relation, et prend les valeurs successives $1, 2, \ldots, 0$. Dans ce qui suit, un indice plus grand que n doit être remplacé par son résidu relatif au diviseur n.

Nous montrerons d'abord qu'une solution en donne d'autres.

Une solution du système étant

$$(\mathrm{M})\qquad \begin{cases} u_1=m_1, \qquad u_2=m_2, \qquad \ldots, \\ x_1=\mu_1, \qquad x_2=\mu_2, \qquad \ldots, \end{cases}$$

inscrivons les n quantités m aux sommets d'un polygone régulier convexe en allant de gauche à droite, les n quantités μ aux sommets d'un polygone régulier convexe en allant de gauche à droite, et convenons de dire que ces deux polygones convexes, parcourus de gauche à droite à partir des sommets m_1 et μ_1 représentent une solution. Deux contours obtenus en prenant les sommets de k en

k, k étant premier avec n, à partir de deux sommets quelconques m_r et μ_s, représentent encore une solution, c'est-à-dire que l'on peut prendre

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = m_r, & u_2 = m_{r+k}, & u_3 = m_{r+2k}, & \ldots, \\ x_1 = \mu_s, & x_2 = \mu_{s+k}, & x_3 = \mu_{s+2k}, & \ldots; \end{array}\right.$$

en effet, la $(\lambda + 1)^{\text{ième}}$ relation du système (1), commençant par $u_{\lambda+1} x_n$, sera satisfaite si l'on a

$$m_{r+\lambda k}\mu_{s+(n-1)k} + m_{r+(\lambda+1)k}\mu_{s+(n-2)k} + \ldots = 0,$$

les n indices des m, par exemple, étant distincts, et la somme des indices étant constante; or, cela a lieu par hypothèse. Deux valeurs de k complémentaires par rapport à n donnent les mêmes polygones réguliers, mais parcourus une fois dans un sens, une fois dans le sens contraire, ce qui correspond à des solutions distinctes.

De plus, on peut prendre pour les u les valeurs μ, pour les x les valeurs m; en effet, d'après la loi des relations (1), chacune de ces relations se reproduit quand on échange u_1 et x_1, u_2 et x_2, ..., et cette remarque suffit à démontrer le fait énoncé.

En particulier, on peut prendre, avec $k = n - 1$, $r = s$,

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = \mu_r, & u_2 = \mu_{r-1}, & u_3 = \mu_{r-2}, & \ldots, \\ x_1 = m_r, & x_2 = m_{r-1}, & x_3 = m_{r-2}, & \ldots, \end{array}\right.$$

ce qui revient à échanger, dans la première solution, u_1 et x_r, u_2 et x_{r-1}, ..., la somme des indices étant $r + 1$, c'est-à-dire les facteurs qui s'accompagnent, dans la $(r+1)^{\text{ième}}$ des relations (1); pour $r = n$, on échange u_1 et x_n, u_2 et x_{n-1}, ..., c'est-à-dire les facteurs qui s'accompagnent dans la première des relations (1); si l'on remplace la notation x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ... par la notation X_1, X_2, X_3, ... qui peut paraître plus naturelle, c'est ce dernier fait qui apparaît d'abord : la différence des indices étant alors constante dans chacune des relations (1), et prenant les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$, si l'on échange u_1 et X_1, u_2 et X_2, la première relation se reproduit, et l'ordre des $n-1$ autres est renversé.

2. Voici maintenant ce que l'on peut appeler la *résolution* du système (1). Ayant observé que les n relations, considérées comme des équations en x_1, x_2, ..., se réduisent à une seule si l'on a

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_1} = \sqrt[n]{1},$$

et reconnu ainsi le rôle des racines n^{iemes} de l'unité dans la question, désignons par θ une racine de l'équation binome

$$\theta^n - 1 = 0, \tag{2}$$

et ajoutons les relations (1) multipliées respectivement par θ^{n-1}, 1, θ, θ^2, ..., θ^{n-2} ; nous aurons

$$(u_1 + \theta u_2 + \ldots + \theta^{n-1} u_n)(x_1 + \theta x_2 + \ldots + \theta^{n-1} x_n) = 0,$$

les u et les x étant ainsi séparés. En donnant à θ les n valeurs θ_1, θ_2, ..., θ_n, nous aurons un système de relations équivalent au système (1), attendu que le déterminant des multiplicateurs employés pour déduire le nouveau système du premier, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_n \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \ldots & \theta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \ldots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

est le produit des différences des n quantités θ prises deux à deux, et n'est par conséquent pas nul. Dès lors, pour satisfaire au système (1), il faut avoir

$$(3)\quad \begin{cases} u_1 + \theta_1 u_2 + \theta_1^2 u_3 + \ldots + \theta_1^{n-1} u_n = 0, \\ u_1 + \theta_2 u_2 + \theta_2^2 u_3 + \ldots + \theta_2^{n-1} u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1 + \theta_p u_2 + \theta_p^2 u_3 + \ldots + \theta_p^{n-1} u_n = 0, \end{cases}$$

avec

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 + \theta_{p+1} x_2 + \theta_{p+1}^2 x_3 + \ldots + \theta_{p+1}^{n-1} x_n = 0, \\ x_1 + \theta_{p+2} x_2 + \theta_{p+2}^2 x_3 + \ldots + \theta_{p+2}^{n-1} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 + \theta_n x_2 \quad + \theta_n^2 x_3 \quad + \ldots + \theta_n^{n-1} x_n = 0, \end{cases}$$

les θ étant partagés en deux groupes, et l'on aura *différents genres de solutions* selon la valeur de p, qui pourra être 0, 1, 2, 3, ..., n, et selon la façon dont on effectuera le partage des θ en deux groupes; on peut dire que la solution donnée par les formules (3) et (4) est du genre $(p, n-p)$.

3. On peut modifier la forme de la réponse en exprimant les u en fonction de $n-p$ paramètres et les x en fonction de p paramètres. Pour les u, par exemple, il faut connaître $n-p$ solutions distinctes du système (3), et nous reviendrons sur le sens bien connu du mot *distinctes* dans les questions de ce genre; or on a précisément les solutions

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = \frac{1}{\theta_{p+j}}, \qquad u_3 = \frac{1}{\theta_{p+j}^2}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \frac{1}{\theta_{p+j}^{n-1}},$$

j prenant les valeurs 1, 2, ..., $n-p$, et ces $n-p$ solutions sont distinctes. D'abord ce sont des solutions, c'est-à-dire que l'on a

$$1 + \left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right) + \left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^{n-1} = 0,$$

i prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., p : en effet, $\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}$ est une racine de l'équation (2), autre que 1, et elle satisfait, par suite, à l'équation obtenue en divisant le premier membre de l'équation (2) par $\theta - 1$, c'est-à-dire à l'équation

$$\theta^{n-1} + \theta^{n-2} + \ldots + \theta + 1 = 0.$$

Le système (3) admet donc la solution

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_n, \\ u_2 &= \frac{a_{p+1}}{\theta_{p+1}} + \frac{a_{p+2}}{\theta_{p+2}} + \ldots + \frac{a_n}{\theta_n}, \\ u_3 &= \frac{a_{p+1}}{\theta_{p+1}^2} + \frac{a_{p+2}}{\theta_{p+2}^2} + \ldots + \frac{a_n}{\theta_n^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n &= \frac{a_{p+1}}{\theta_{p+1}^{n-1}} + \frac{a_{p+2}}{\theta_{p+2}^{n-1}} + \ldots + \frac{a_n}{\theta_n^{n-1}}, \end{aligned}\right.$$

les $n-p$ quantités a étant des paramètres arbitraires. En outre, les $n-p$ solutions indiquées sont distinctes, c'est-à-dire ne satisfont pas à une même relation linéaire et homogène, attendu que, dans la matrice à laquelle elles donnent lieu, matrice que l'on peut lire sur le Tableau (3'), le premier déterminant, par exemple, est différent de zéro; les formules (3') donnent donc la solution générale du système (3). Je rappelle le raisonnement qui démontre rigoureusement ce fait. Le système (3) détermine les p dernières quantités u en fonction des $n-p$ premières, que l'on peut se donner à volonté; or c'est aussi ce qui a lieu avec les formules (3'), et l'on peut disposer des $n-p$ paramètres a pour donner aux $n-p$ premières quantités u des valeurs quelconques; car, si l'on se donne les valeurs des $n-p$ premières quantités u, on a $n-p$ équations entre les $n-p$ quantités a, et ce système d'équations a une solution, le déterminant des coefficients des inconnues étant différent de zéro, comme on l'a dit. On peut donc regarder indifféremment les n quantités u comme liées par les p relations (3), ou comme données par les formules (3′), qui renferment $n-p$ paramètres arbitraires a.

De même, on peut remplacer les $n-p$ relations (4) entre les n quantités x par les formules suivantes, qui renferment p paramètres arbitraires α :

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p,\\ x_2 &= \frac{\alpha_1}{\theta_1} + \frac{\alpha_2}{\theta_2} + \frac{\alpha_3}{\theta_3} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p},\\ x_3 &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^2} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^2} + \frac{\alpha_3}{\theta_3^2} - \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^{n-1}} + \frac{\alpha_3}{\theta_3^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p^{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

4. Finalement on peut remplacer le système (1) par un système formé :

D'une part, des p relations (3) ou des formules (3′);

D'autre part, des $n-p$ relations (4) ou des formules (4).

Il pourra être avantageux de prendre les formules (3′) et les relations (4), ... Si l'on prend les formules (3′) et les formules (4′), on peut dire que, avec n paramètres a et n paramètres α, liés par les n relations

$$(5)\qquad a_1\alpha_1 = 0,\qquad a_2\alpha_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad a_n\alpha_n = 0,$$

la solution générale du système (1) est

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u_\lambda &= \frac{a_1}{\theta_1^{\lambda-1}} + \frac{a_2}{\theta_2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{a_n}{\theta_n^{\lambda-1}},\\ x_\lambda &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^{\lambda-1}} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\theta_n^{\lambda-1}}; \end{aligned}\right.$$

on vérifie aisément que ces formules satisfont aux relations (1).

5. Les faits énoncés au n° 1 se vérifient facilement sur les relations (3) et (4), ou sur les formules (3') et (4').

Le système [(3) (4)] admettant la solution (M), la $i^{\text{ième}}$ des relations (3) donne

$$m_1 + \theta_i m_2 + \theta_i^2 m_3 + \ldots = 0,$$

ou

$$m_r + \theta_i m_{r+1} + \theta_i^2 m_{r+2} + \ldots = 0,$$

ou encore

$$m_r + \theta_i^k m_{r+k} + \theta_i^{2k} m_{r+2k} + \ldots = 0,$$

k étant premier avec n afin d'obtenir tous les termes, ou, en posant $\theta_i^k = \Theta_i$,

$$m_r + \Theta_i m_{r+k} + \Theta_i^2 m_{r+2k} + \ldots = 0;$$

la $j^{\text{ième}}$ des relations (4) donne de même

$$\mu_s + \Theta_j \mu_{s+k} + \Theta_j^2 \mu_{s+2k} + \ldots = 0;$$

comme θ_1, θ_2, ..., pris dans leur ensemble, sont θ, θ^2, ..., θ étant une racine primitive de l'équation (2), les quantités Θ sont θ^k, $(\theta^k)^2$, ..., c'est-à-dire θ_1, θ_2, ..., puisque θ^k est une racine primitive de l'équation (2). Il suit de là que l'on a une solution du système (1) en prenant $u_1 = m_r$, $u_2 = m_{r+k}$, ..., $x_1 = \mu_s$, $x_2 = \mu_{s+k}$, ...; elle correspond à un système de θ que l'on obtient en remplaçant chacun des premiers θ par sa puissance $k^{\text{ième}}$; pour $k = n - 1$, chaque θ est remplacé par son inverse.

La symétrie entre les u et les x est, d'ailleurs, en évidence dans les relations (3) et (4), ou dans les formules (3') et (4'); le système admettant la solution (M) et celles qui s'en déduisent comme on vient de dire, on a aussi la solution

$$\begin{cases} u_1 = \mu_1, & u_2 = \mu_2, & \dots, \\ x_1 = m_1, & x_2 = m_2, & \dots \end{cases}$$

et celles qui s'en déduisent; si la première solution est du genre $(p, n-p)$, les u vérifiant p relations, les x vérifiant $n-p$ relations, la seconde est du genre $(n-p, p)$, les u vérifiant $n-p$ relations, les x vérifiant p relations. (Relativement au fait particulier signalé au n° 1, et correspondant à $k = n-1$, $r = s$, on peut remarquer que la substitution à chaque θ de sa puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ n'est pas autre chose que la substitution, à chaque θ, de son inverse.)

II.

6. Si dans le système (1), on regarde les x comme des inconnues, on est amené à considérer l'expression

$$(7) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & k & l \\ b & c & d & \dots & l & a \\ c & d & e & \dots & a & b \\ . & . & . & \dots & . & . \\ k & l & a & \dots & i & j \\ l & a & b & \dots & j & k \end{vmatrix} \times (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.$$

Par analogie avec la remarque faite au début du n° 2, on peut observer que l'hypothèse $\Delta = 0$ entraîne, comme conséquence de faits bien connus, les relations suivantes entre les premiers mineurs,

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \dots = \frac{L}{A} = \frac{1}{\theta}, \qquad \theta^n = 1,$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{A}{1} = \frac{B}{\theta} = \frac{C}{\theta^2} = \dots = \frac{L}{\theta^{n-1}},$$

et, par suite,

(9) $$a + b\theta + c\theta^2 + \ldots + l\theta^{n-1} = 0;$$

on en conclut

(10) $$\Delta = \prod (a + b\theta + c\theta^2 + \ldots + l\theta^{n-1});$$

on peut le voir directement. La relation identique

$$\theta'^{n-1} + \theta'^{n-2}\theta + \theta'^{n-3}\theta^2 + \ldots = 0,$$

$\theta' \neq \theta$, donne alors

$$A\theta'^{n-1} + B\theta'^{n-2} + C\theta'^{n-3} + \ldots = 0,$$

comme conséquence de l'hypothèse (9), et il en résulte que le premier membre de la relation que l'on vient d'écrire est, à un facteur numérique près, le produit des facteurs $a + b\theta + c\theta^2 + \ldots$ fournis par les θ autres que θ'; appliquant ce fait à θ, on a

(11) $$\Delta = (a + b\theta + c\theta^2 + \ldots)(A + B\theta^{n-1} + C\theta^{n-2} + \ldots),$$

et on le vérifie aisément.

Pour $n = 4$, par exemple, la formule (10) donne

$$\Delta = (a^2 - c^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 + 4ac(b^2 + d^2) - 4bd(a^2 + c^2).$$

III.

7. Pour $n = 3$, la discussion du système (α) se réduit à ceci :

1° Si l'on a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

les quantités x, y, z sont quelconques;

2° Les trois équations se réduisent à une seule,

$$x + \theta y + \theta^2 z = 0,$$

si l'on a

$$\frac{a}{\theta^2} = \frac{b}{\theta} = \frac{c}{1},$$

avec $\theta^3 = 1$;

3° Si l'on a

$$a + b\theta + c\theta^2 = 0.$$

sans être dans le cas précédent avec θ' ou θ'', on a

$$\frac{x}{\theta^2} = \frac{y}{\theta} = \frac{z}{1};$$

4° Si l'on a

$$(a + b\theta + c\theta^2) \times \ldots \times \ldots \gtrless 0,$$

on a

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

8. On a alors

(12) $$\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

A propos de la formule (10) appliquée à ce cas, soit

(13) $$\Delta = (a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha),$$

α étant une racine primitive de l'équation binome $\theta^3 = 1$, observons que l'hypothèse

$$a + b\theta + c\theta^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad b\theta + c\theta^2 = -a,$$

donne facilement, par une élévation au cube, $\Delta = 0$; de là deux remarques. D'abord, si l'on regarde l'égalité

(14) $$a^3 - 3abc + (b^3 + c^3) = 0$$

comme une équation en a, dont les racines sont $-b\theta - c\theta^2$, l'identification avec l'équation

$$a^3 + pa + q = 0$$

donne une méthode de résolution de l'équation du troisième degré, identique au fond à la méthode classique; on peut dire que l'on identifie l'équation à résoudre avec celle que donne l'annulation du produit (13). D'autre part, étant donnée l'équation

(15) $$\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P} = 0,$$

on obtient d'abord

$$(16) \qquad M + N + P - 3\sqrt[3]{MNP} = 0,$$

par un calcul qui revient à effectuer le produit (13) avec $\sqrt[3]{M}$ au lieu de $a, \ldots$; *a priori,* le premier membre de l'équation finale

$$(M + N + P)^3 - 27MNP = 0$$

est un produit de neuf facteurs.

L'identité

$$(17) \qquad \Delta = (a + b + c)(A + B + C),$$

avec $A = a^2 - bc, \ldots,$ est employée quand on commence la transformation de la fraction

$$(18) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P}};$$

on pose $\sqrt[3]{M} = a, \ldots,$ et l'on multiplie les deux termes de la fraction par le facteur $A + B + C$; c'est du moins la méthode la plus simple.

Le facteur $A + B + C$ est essentiellement positif, nul seulement pour $a = b = c$; on en conclut

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geqq abc,$$

ou

$$(19) \qquad \frac{M + N + P}{3} \geqq \sqrt[3]{MNP},$$

dans l'hypothèse

$$a + b + c \geqq 0$$

ou

$$(20) \qquad \sqrt{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P} \geqq 0;$$

pour M, N, P positifs, cela rentre dans un théorème général.