A. DE SAINT-GERMAIN

Sur le mouvement d'une barre qui s'appuie sur deux droites dépolies

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 307-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__307_1>

[R8γ]

SUR LE MOUVEMENT D'UNE BARRE QUI S'APPUIE SUR DEUX DROITES DÉPOLIES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La discussion complète du mouvement d'une barre pesante AB, dont les extrémités sont assujetties à glisser respectivement sur deux droites fixes, rectangulaires, OX, OY, est extrêmement compliquée; mais, si l'on suppose la barre homogène, non pesante, et le coefficient de frottement sur OX et sur OY ayant la même valeur f, la discussion devient facile et la simplicité de ses résultats lui donne quelque intérêt.

Je suppose la masse de la barre égale à l'unité, sa longueur à $2a$; M désignant son milieu, soit θ l'angle MOX égal à MAO. Je suppose θ' égal à $\frac{d\theta}{dt}$ toujours positif, et je me borne à étudier les circonstances du mouvement quand θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$; on en déduira aisément ce qui se produira quand θ passera dans les quadrants suivants :

Soient X, Y les réactions normales exercées sur B par OY, sur A par OX et comptées positivement dans le sens des axes; les forces de frottement, comptées aussi positivement dans les mêmes sens, sont $\varepsilon f Y$ en A, $\varepsilon' f X$ en B, ε, ε' désignant les facteurs 1 ou -1, de telle sorte qu'on ait

$$(1) \qquad \varepsilon Y > 0, \qquad \varepsilon' X < 0.$$

Le centre de gravité M a pour coordonnées $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, et son mouvement est déterminé par les équations

$$-a(\theta''\sin\theta + \theta'^2\cos\theta) = X + \varepsilon f Y,$$
$$a(\theta''\cos\theta - \theta'^2\sin\theta) = Y + \varepsilon' f X;$$

le théorème sur les moments des quantités de mouvement par rapport au point O donne

$$a^2\theta'' - \frac{1}{3}a^2\theta'' = 2aY\cos\theta - 2aX\sin\theta.$$

Nous avons trois équations linéaires d'où l'on peut tirer les valeurs de θ'', X, Y : leur dénominateur commun est

$$P = 2 + \varepsilon\varepsilon' f^2 - 3(\varepsilon + \varepsilon') f \sin\theta\cos\theta.$$

et l'on a

$$(2) \qquad P\theta'' = 3f(\varepsilon \sin^2\theta - \varepsilon' \cos^2\theta)\theta'^2,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} PX = -a(2\cos\theta + \varepsilon f \sin\theta)\theta'^2, \\ PY = -a(2\sin\theta + \varepsilon' f \cos\theta)\theta'^2. \end{cases}$$

Cherchons s'il est possible de déterminer *a priori* les valeurs de θ auxquelles conviennent les diverses combinaisons de signes qu'on peut admettre pour ε, ε', eu égard aux conditions nécessaires (1). Je fais une première distinction, qui se justifiera bientôt, suivant que f est $\gtrless \sqrt{2}$.

Supposant d'abord $f < \sqrt{2}$, je considère deux cas :

1° $\varepsilon' = -\varepsilon$. P, égal à $2 - f^2$, est positif et, eu égard aux relations (3), les inégalités (1) deviennent

$$(4) \qquad 2\varepsilon \sin\theta - f\cos\theta < 0, \qquad 2\varepsilon\cos\theta + f\sin\theta < 0;$$

il faut et il suffit, pour qu'elles soient satisfaites, que ε soit égal à -1 et θ inférieur à l'arc λ dont la tangente est $\frac{2}{f}$.

2° $\varepsilon' = \varepsilon$. P, égal à $2 + f^2 + 3\varepsilon f \sin 2\theta$, n'est plus toujours positif. La combinaison des relations (1) et (3) donne

$$(5) \quad P(2\varepsilon\sin\theta + f\cos\theta) < 0, \qquad P(2\varepsilon\cos\theta + f\sin\theta) > 0.$$

Quel que soit le signe de P, ε doit être égal à -1; on voit alors que P n'est négatif que si θ est compris entre μ et $\frac{\pi}{2} - \mu$, μ étant le plus petit arc positif dont le double a pour sinus $\frac{2+f^2}{3f}$; μ n'est réel que si f est compris entre 1 et 2; mais il nous sera utile de connaître le signe de

$$\sin 2\mu - \sin 2\lambda = \frac{2+f^2}{3f} - \frac{4f}{4+f^2} = \frac{(f^2-2)(f^2-4)}{3f(f^2+4)}.$$

Avec nos hypothèses, λ est $> \frac{\pi}{4}$ et $\sin 2\lambda < \sin 2\mu$. Si l'on suppose $P > 0$, les inégalités (5), où $\varepsilon = -1$, exigent que θ soit $> \lambda$; or, pour toutes les valeurs de θ comprises entre λ et $\frac{\pi}{2}$, P est positif, et les inégalités (5) effectivement satisfaites. Si P devait être négatif, les mêmes inégalités exigeraient que θ fût $< \frac{\pi}{2} - \lambda$, $\sin 2\theta$ étant inférieur à $\sin 2\lambda$ et à $\sin 2\mu$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de $P < 0$, qui doit être rejetée.

De l'analyse précédente, il résulte que si θ est compris entre o et λ, on doit faire $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = 1$; X, Y sont négatifs, et l'équation (2) donne

$$(2 - f^2)\,d\theta' = -3f\theta'\,d\theta, \qquad \theta' = Ce^{-\frac{3f\theta}{2-f^2}}:$$

si θ' prend les valeurs θ'_0 et ω pour $\theta = 0$ et $\theta = \lambda$, on a

$$\omega = \theta'_0\, e^{-\frac{3f\lambda}{2-f^2}}.$$

Quand θ est compris entre λ et $\frac{\pi}{2}$, on fait

$$\varepsilon = \varepsilon' = -1,$$

X devient positif, Y reste négatif et l'équation (2) donne

$$(2 + f^2 - 3f\sin 2\theta)\,d\theta'^2 - 6f\theta'^2\cos 2\theta\,d\theta = 0,$$
$$(2 + f^2 - 3f\sin 2\theta)\,\theta'^2 = C = \frac{(2 - f^2)(4 - f^2)}{4 + f^2}\,\omega^2,$$

et, en appelant θ'_1 la valeur de θ' pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\theta_1'^2 = \frac{(2 - f^2)(4 - f^2)}{(2 + f^2)(4 + f^2)}\, e^{-\frac{6f\lambda}{2-f^2}}\, \theta_0'^2.$$

Quand θ croîtra de $\frac{\pi}{2}$ à π, θ' prendra la suite des valeurs que nous lui avons vu prendre dans le premier quadrant, mais toutes multipliées par $\frac{\theta'_1}{\theta'_0}$; un fait analogue se reproduira au passage de θ dans les quadrants suivants et les valeurs correspondantes de θ' décroissent en progression géométrique, ne s'annulant qu'au bout d'un temps infini.

Quand f tend vers $\sqrt{2}$, X et Y tendent vers l'infini. Cherchons ce qui arrive quand f est $> \sqrt{2}$, et, pour cela, reprenons la discussion précédente :

1° $\varepsilon' = -\varepsilon$. P est négatif; les inégalités (4) doivent être renversées, ε est égal à 1 et $\theta > \frac{\pi}{2} - \lambda$.

2° $\varepsilon' = \varepsilon$. Les inégalités (5) subsistent, exigeant $\varepsilon = -1$: il est bon de distinguer deux cas, suivant que f est $\gtrless 2$. Soit d'abord $f > 2$: P est forcément positif et les inégalités (5) exigent $\theta > \frac{\pi}{2} - \lambda$, λ étant ici $< \frac{\pi}{4}$. Si f est compris entre $\sqrt{2}$ et 2, on peut supposer $P \gtrless 0$; s'il est positif, les inégalités (5) exigent que θ soit $> \lambda > \frac{\pi}{4}$; mais maintenant $\sin 2\lambda$ est $> \sin 2\mu$, et l'on ne peut prendre que les valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2} - \mu$ et $\frac{\pi}{2}$. Si P doit être négatif, les inégalités (5) exigent que θ soit $< \frac{\pi}{2} - \lambda$; mais, de ces valeurs, on ne peut accepter que celles qui sont comprises entre μ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$.

On voit que, dans aucun cas, les conditions (1) ne peuvent être satisfaites pour des valeurs de θ inférieures à la plus petite des quantités μ, λ, $\frac{\pi}{2} - \lambda$; pour ces valeurs, le mouvement de AB est impossible; il y a arc-boutement; pour les valeurs de θ comprises entre ce minímum et $\frac{\pi}{2}$, le mouvement devient possible, mais la Mécanique rationnelle ne suffit plus pour déterminer, dans tous les cas, les signes de ε, ε' et la forme de l'équation du mouvement.