NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

À propos de la définition du nombre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 277-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__277_1>

[V1a]

A PROPOS DE LA DÉFINITION DU NOMBRE;

PAR M. H. LAURENT.

M. J. Tannery vient de publier (*Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1898) un compte rendu de l'Ouvrage de M. Laisant : *La Mathématique*. Il y fait une critique, qui me semble injuste, de la définition du

Nombre : (¹) 1° il se demande si une définition du nombre est utile; 2° il accuse M. Laisant de ne pas avoir défini le mot *quantité* qui entre dans la définition du nombre.

Comme je me trouve indirectement visé, je demande la permission à M. Tannery de lui prouver qu'une bonne définition du nombre permet de simplifier considérablement l'exposé des principes fondamentaux de l'Arithmétique et de les rendre autrement clairs que par les méthodes allemandes, lesquelles tendent malheureusement à donner un aspect nébuleux à l'esprit français réputé si clair.

En second lieu, je vais essayer de lui indiquer la définition, très nécessaire, à mon avis, de la quantité, définition qu'il n'ignore peut-être que parce qu'il obéit, sans le vouloir, à des idées systématiques, l'empêchant de jeter ses regards à côté de la direction qu'il a choisie.

Deux objets matériels ou immatériels qui ne diffèrent en rien constituent un seul et même objet, car s'ils étaient distincts, ils différeraient par quelque propriété, position, couleur, forme, ...; nous dirons que ce sont deux objets *identiques*.

Deux ou plusieurs objets, sans être identiques, peu-

(¹) Cette définition, comme je l'ai dit dans mon Livre, a été empruntée par moi à M. H. Laurent. La Rédaction des *Nouvelles Annales* ne pouvait donc refuser à celui-ci la faculté de défendre une doctrine, que d'ailleurs je trouve personnellement excellente; mais il ne faudrait pas en conclure que le Journal prend, en raison de ce fait, un caractère de polémique que nous voulons absolument éviter.

En ce qui concerne particulièrement M. J. Tannery, dont je ne partage pas toutes les idées en matière mathématique, je tiens au contraire à profiter de l'occasion pour le remercier très sincèrement de son compte rendu; la franchise des critiques se concilie parfaitement chez lui avec une parfaite courtoisie de la forme littéraire, et même, je le suppose, avec une bienveillance amicale, qui d'ailleurs est très réciproque de ma part. C.-A. LAISANT.

vent avoir une propriété commune; tels sont, par exemple, les objets rouges; si l'on fait abstraction de toutes leurs autres propriétés, on dit qu'on les considère comme *égaux* entre eux. Par définition, deux objets égaux à un autre sont alors égaux entre eux, puisqu'ils ont la propriété qui constitue l'égalité.

Si l'on a des objets a, b, c, ..., tels qu'en les combinant au moyen d'un certain procédé, on obtienne un objet s qui reste égal à lui-même quel que soit l'ordre dans lequel on combine les objets a, b, c, ..., on dira que s est la somme de a, b, c, ...; parmi les objets a, b, ... il peut en exister dont la considération n'influe pas sur la somme s; ces objets sont dits objets *nuls*; a, b, ... sont les parties de s, etc.

(La multiplication des nombres est un genre d'addition dans lequel l'objet nul est le nombre 1; zéro et nul ne sont pas synonymes.)

Eh bien, des quantités de même espèce sont des objets à propos desquels on a défini l'égalité et l'addition.

Une quantité A est plus grande qu'une autre B de même espèce, quand on obtient A en ajoutant une quantité de même espèce à B.

De là les vérités suivantes qui sont, non pas des axiomes, mais des vérités de définition : la somme est plus grande que ses parties; une somme ne change pas quand on intervertit l'ordre des parties; et l'on prouve que, pour ajouter une somme à A, il suffit de lui ajouter successivement ses parties.

Voilà pour la définition des quantités. Je ne fais pas à M. Tannery l'injure de croire qu'il ignore ce que je viens de dire; je m'étonnerais seulement qu'il nous accuse de l'ignorer, si je ne connaissais toute sa bonne foi scientifique.

Notre définition du nombre devient alors très claire; je la transcris de nouveau :

« Le nombre est une locution, ou un signe qui en est la représentation écrite, et qui sert à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites. »

Si M. Tannery veut se donner la peine de lire le tout petit Traité d'Arithmétique de MM. Laisant et Lemoine, il verra que cette bonne définition du nombre permet de faire la théorie des nombres incommensurables d'une façon claire et lumineuse, en quelques lignes, et en s'appuyant sur ce simple *postulatum* (je dis *postulatum* parce que les géomètres de l'école allemande se sont efforcés de le démontrer sans y parvenir) :

« Une quantité qui croît sans devenir plus grande que A jouit de cette propriété qu'il existe une quantité a dont elle finit par différer d'aussi peu que l'on veut; et a est, ou A, ou une quantité plus petite que A. »

Si je ne craignais d'abuser de l'hospitalité des *Nouvelles Annales* je ferais volontiers une critique des méthodes allemandes, dont *tous* les géomètres allemands ne sont peut-être pas de fervents adeptes. C'est une tâche que j'espère bien pouvoir accomplir quelque jour.