NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GIACOMO CANDIDO

Conséquence d'un théorème sur les congruences pseudosphériques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 275-277
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__275_1>

[O5m]

CONSÉQUENCE D'UN THÉORÈME SUR LES CONGRUENCES PSEUDOSPHÉRIQUES;

Par M. Giacomo CANDIDO, à Pise.

M. le professeur L. Bianchi, dans ses *Lezioni di Geometria differenziale* (p. 269), démontre le théorème

(1) Voir Darboux, *Leçons sur la theorie des surfaces*, t. IV, p. 469.

suivant : *L'élément linéaire sphérique rapporté aux lignes* (u, v), *images des surfaces principales d'une congruence pseudosphérique, prend la forme*

$$(\alpha) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

où le produit $\sqrt{\mathrm{EG}}$ *est une solution de l'équation de Liouville*

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \log \sqrt{\mathrm{EG}}}{\partial u\, \partial v} = \cos\omega \sqrt{\mathrm{EG}} \qquad (\omega = \text{const.});$$

et inversement : *chaque fois que l'élément linéaire sphérique est réduit à la forme* (α) *où la relation* (β) *soit satisfaite, il existe une congruence pseudosphérique correspondante.*

Cela posé, l'équation (β) résolue donne

$$\sqrt{\mathrm{EG}} = \frac{2 f'(u)\varphi'(v)}{\cos\omega [f(u) - \varphi(v)]^2},$$

et nous pouvons écrire aussi

$$(1) \qquad \sqrt{\mathrm{EG}}\, du\, dv = \frac{du\, dv}{\dfrac{\cos\omega}{2}\left[\dfrac{f(u)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(v)}} - \dfrac{\varphi(v)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(v)}}\right]^2}.$$

Cet élément superficiel peut appartenir à une infinité de surfaces qui sont données par l'élément linéaire que nous construisons par le moyen du même élément superficiel. Il y a plus : ayant fixé un élément linéaire, en raison du caractère arbitraire des fonctions $f(u)$, $\varphi(v)$, nous pourrons obtenir d'autress urfaces, et comme conclusion nous pouvons dire : *Il existe une infinité de surfaces qui admettent une représentation sur la sphère de manière à conserver à la fois l'orthogonalité d'un système de lignes* (u, v) *et aussi les aires.*

Application. — Parmi les surfaces en nombre infini auxquelles appartient l'élément superficiel donné par le second membre de (1), il y a aussi les surfaces dont l'élément linéaire est donné par

$$(2)\qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\frac{\cos\omega}{2}\left[\frac{f(u)+\varphi(v)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(u)}}\right]^2}.$$

Parmi les surfaces qui ont cet élément linéaire, nous pouvons spécifier deux classes, car *la famille de surfaces précédemment indiquée contient des hélicoïdes ou des surfaces de révolution.*

En effet, supposons que l'on ait

$$f(u) = u^m, \qquad \varphi(u) = v^m;$$

alors l'élément linéaire (2) devient

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\frac{\cos\omega}{2}\left(\frac{u^{\frac{m+1}{2}}}{mv^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{v^{\frac{m+1}{2}}}{mu^{\frac{m-1}{2}}}\right)^2}.$$

Alors aussi E et G de l'élément linéaire de la surface sont des fonctions homogènes de degré -2, et, se rappelant un théorème de M. Darboux (vol. III, p. 73; § 614) on arrive à la conclusion énoncée.