LACOUR

Relation entre les axes d'une section centrale d'un ellipsoïde et la distance du centre au plan tangent en l'un des sommets de la section

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 272-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__272_1>

[$L^2 5b$]

RELATION ENTRE LES AXES D'UNE SECTION CENTRALE D'UN ELLIPSOIDE ET LA DISTANCE DU CENTRE AU PLAN TANGENT EN L'UN DES SOMMETS DE LA SECTION;

PAR M. LACOUR,

Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

Soient

a, b, c les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde;

u, v, w les coordonnées du plan sécant rapporté aux axes de l'ellipsoïde;

Mémoire de M. WEBER : *Sur la surface de Kummer* (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 353) — *Voir* aussi : *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, par APPELL et LACOUR, p. 169.

β et α' les carrés des demi-axes de la section ;
α le carré de la distance du centre O au plan tangent au sommet B_1 tel que $\overline{OB_1}^2 = \beta$.

On sait que l'on a les égalités

$$\frac{au^2}{a-\beta} + \frac{bv^2}{b-\beta} + \frac{cw^2}{c-\beta} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{au^2}{a-\alpha'} + \frac{bv^2}{b-\alpha'} + \frac{cw^2}{c-\alpha'} = 0. \tag{2}$$

Pour obtenir α, il suffit de remarquer que les coordonnées du sommet B_1 de la section sont données par les égalités [1]

$$x = m\frac{au}{a-\beta}, \qquad y = m\frac{bv}{b-\beta}, \qquad z = m\frac{cw}{c-\beta},$$

avec la condition

$$\frac{1}{m^2} = \frac{au^2}{(a-\beta)^2} + \frac{bv^2}{(b-\beta)^2} + \frac{cw^2}{(c-\beta)^2}.$$

Alors on a

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m^2\left[\frac{u^2}{(a-\beta)^2} + \frac{v^2}{(b-\beta)^2} + \frac{w^2}{(c-\beta)^2}\right],$$

ou, en remplaçant m^2 par sa valeur et en ordonnant par rapport à u, v, w,

$$\frac{(a-\alpha)u^2}{(a-\beta)^2} + \frac{(b-\alpha)v^2}{(b-\beta)^2} + \frac{(c-\alpha)w^2}{(c-\beta)^2} = 0. \tag{3}$$

Nous aurons la relation cherchée entre β, α' et α en éliminant u^2, v^2, w^2 entre les équations (1), (2), (3), ou encore en éliminant $\frac{u^2}{a-\beta}$, $\frac{v^2}{b-\beta}$, $\frac{w^2}{c-\beta}$ entre les

---

(1) *Voir*, par exemple, *Géométrie analytique*, de Briot et Bouquet, revue par Appell, p. 592.

équations

$$(1)\qquad \frac{au^2}{a-\beta}+\frac{bv^2}{b-\beta}+\frac{cw^2}{c-\beta}=0,$$

$$(2)'\qquad \frac{au^2}{(a-\alpha')(a-\beta)}+\frac{bv^2}{(b-\alpha')(b-\beta)}+\frac{cw^2}{(c-\alpha')(c-\beta)}=0.$$

$$(3)\qquad \frac{(a-\alpha)u^2}{(a-\beta)^2}+\frac{(b-\alpha)v^2}{(b-\beta)^2}+\frac{(c-\alpha)w^2}{(c-\beta)^2}=0.$$

On obtient ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{a}{a-\alpha'} & \dfrac{b}{b-\alpha'} & \dfrac{c}{c-\alpha'} \\ \dfrac{a-\alpha}{a-\beta} & \dfrac{b-\alpha}{b-\beta} & \dfrac{c-\alpha}{c-\beta} \end{vmatrix}=0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$abc\sum\frac{1}{a-\beta}\left(\frac{1}{c-\alpha'}-\frac{1}{b-\alpha'}\right)$$
$$-\alpha\sum\frac{bc}{a-\beta}\left(\frac{1}{c-\alpha'}-\frac{1}{b-\alpha'}\right)=0.$$

ou encore

$$\begin{aligned}&abc\,\Sigma\, a(b-c)(b-\beta)(c-\beta)\\ &-(\alpha+\alpha')abc\,\Sigma(b-c)(b-\beta)(c-\beta)\\ &\quad+\alpha\alpha'\,\Sigma\, bc(b-c)(b-\beta)(c-\beta)=0.\end{aligned}$$

En ordonnant par rapport à β et posant

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$h=a+b+c,\qquad k=bc+ca+ab,\qquad l=abc,$$

on trouve enfin la relation cherchée sous la forme

$$D[\alpha\alpha'\beta^2+\beta(l-h\alpha\alpha')+k\alpha\alpha'-l(\alpha+\alpha')]=0.$$

Remarque. — Cette relation contient *symétriquement* α et α', bien que α et α' n'interviennent pas de la même manière dans l'énoncé de la question. Quand α et α' sont donnés, β peut être obtenu en résolvant une équation du second degré : soit β' la seconde racine de cette équation du second degré. Les relations entre les racines et les coefficients sont ici

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \beta + \beta' &= h - \frac{l}{\alpha\alpha'}, \\ \beta\beta' &= k - \frac{l}{\alpha\alpha'}(\alpha + \alpha'); \end{aligned} \right.$$

elles peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\alpha\alpha' &= l, \\ \mathrm{M}(\alpha - \alpha') &= k - \beta\beta', \\ \mathrm{M} &= h - \beta - \beta'. \end{aligned}$$

Les quatre paramètres $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ *liés par les deux égalités* (I) *peuvent servir de coordonnées pour le point* B_1 *de l'ellipsoïde.*

Elles ont été introduites avec avantage par M. Darboux dans l'étude de la surface des ondes de Fresnel qui peut, comme on sait, se déduire de l'ellipsoïde au moyen d'une transformation apsidale (1).