NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES MICHEL

Sur la règle des analogies de M. Lemoine

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 24-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__24_0>

[K20e]

SUR LA RÈGLE DES ANALOGIES DE M. LEMOINE;

PAR M. CHARLES MICHEL,
Élève à l'École Normale supérieure.

On doit à M. Émile Lemoine (¹) la découverte d'un remarquable principe général concernant les analogies que présentent entre elles les relations métriques entre les segments et les angles qu'on peut déduire géométriquement d'un triangle. Il ne me semble pas qu'on en ait encore donné un énoncé précis et une démonstration rigoureuse.

M. Lemoine a cru pouvoir donner une raison intuitive de son principe en s'appuyant sur la remarque suivante :

Si dans une relation entre des segments et des angles, déduits d'un triangle, on remplace les nombres qui les mesurent par leurs valeurs en fonction des côtés et des angles du triangle, on obtient une nouvelle relation, qui est homogène par rapport aux côtés, et, si l'on remplace les côtés par les sinus des angles qui leur sont proportionnels, on a en définitive une relation entre les trois angles A, B, C, qui résulte de ce que la somme de ces angles est égale à π. Si donc on remplace dans cette relation A, B, C par trois fonctions de A, B, C dont la somme soit égale à π, la relation est encore satisfaite.

M. Lemoine conclut de là qu'on fait ainsi correspondre à une certaine relation entre des éléments

(¹) LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Marseille, 1891; *Journal de Mathématiques spéciales*, 1891; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1893.

déduits d'un triangle une autre relation, différente en général de la première, entre des éléments de ce triangle. Une telle conclusion n'est pas valable, car nous n'avons pas montré qu'on peut remonter de cette relation à une autre contenant explicitement des éléments autres que les côtés et les angles du triangle. Or, c'est le point essentiel, qui fait tout l'intérêt du principe de M. Lemoine. Ce principe nous permet en effet de passer d'une relation contenant explicitement des éléments autres que les côtés et les angles du triangle à une autre qui contient elle-même explicitement des éléments autres que les côtés et les angles, et même il nous apprend que les éléments contenus dans les deux autres relations, s'ils sont différents, sont du moins définis par les mêmes conditions géométriques. La démonstration de M. Lemoine ne s'applique en réalité qu'aux relations qui contiennent seulement les côtés et les angles. Or, quand, par exemple, nous remplaçons dans la relation $r=(p-a)\tang\frac{A}{2}$, r par une quelconque de ses valeurs ne contenant que les côtés et les angles du triangle, nous formons une relation qui exprime l'égalité de deux quantités égales séparément à r. Les relations entre les éléments qu'on peut déduire d'un triangle ne sont donc pas équivalentes aux relations entre les côtés et les angles de ce triangle.

Voici comment on peut énoncer d'une manière précise le principe de M. Lemoine :

Si, dans une relation entre les côtés et les angles d'un triangle et des éléments définis géométriquement à l'aide de ce triangle, on change A *en* $-$ A, B *en* $\pi-$ B, C *en* $\pi-$ C, a *en* a, b *en* $-b$, c *en* $-c$, *et chacun des éléments qui y entrent en un certain autre, affecté du signe* $+$ *ou du signe* $-$, *mais défini à l'aide* *du triangle par les mêmes conditions géométriques, on obtient une nouvelle relation qui est encore satisfaite.*

Par exemple, si dans la relation

$$r = (p - a)\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

on remplace a par $-a$, b par $-b$, c par $-c$, A par $-$A, le rayon r du cercle inscrit par l'élément r_a défini par la même condition géométrique d'être le rayon d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle et affecté du signe $+$, on a la relation

$$r_a = p\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

Dans la démonstration du principe de M. Lemoine que j'ai publiée en 1893, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, je n'ai pas remarqué l'objection que j'oppose aujourd'hui à l'énoncé et à la démonstration que M. Lemoine en a donnés. Je me suis contenté de montrer que, par un même procédé géométrique, on peut déduire d'une relation quelconque entre a, b, c, A, B, C une relation de même forme entre a, $-b$, $-c$, $-$A, $\pi -$ B, $\pi -$ C, ce qui ne suffit pas pour établir le principe dans la forme précise où je viens de l'énoncer.

Je me propose dans ce travail de reprendre la démonstration de ce principe; je crois bien lui avoir donné une forme rigoureuse, dans la mesure toutefois où le permet la question toujours délicate des conventions de signes. Dans la première Partie je reproduis, en la complétant, la démonstration que j'ai publiée en 1893. Dans la seconde, j'aborde la question par une voie différente, et je suis conduit à une transformation des angles et des côtés qui n'est pas celle de M. Lemoine, mais qui en a toutes les propriétés.

PREMIÈRE PARTIE.

Étant données dans le plan les droites AA′, BB′, ..., LL′, passant par un même point O, les directions positives sur ces droites étant définies par les semi-droites OA, OB, ..., OL situées dans une même région du plan (région positive), relativement à un axe-origine UV, passant par O, sur lequel est définie une direction OU comme direction positive, nous appellerons *angle de deux droites* l'angle de leurs directions positives, et *angle de deux directions positives* l'angle dont il faut faire tourner l'une d'elles pour la faire coïncider avec l'autre, en balayant l'espace compris entre les semi-droites. Dès lors, en définissant un sens positif de rotation, c'est-à-dire en appliquant des conventions de signes analogues à celles qui sont relatives aux segments sur une droite et qui conduisent à l'identité d'Euler, on arrive à une relation générale entre les directions A, B, C, ..., L, où les angles sont définis sans *ambiguïté*

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (K, L) + (L, A) \equiv 0.$$

Cela posé, prenons pour axes de coordonnées deux demi-droites OX et OY, l'une OX coïncidant avec la direction positive de l'axe-origine UV, l'autre OY étant une direction positive définie comme précédemment et faisant, avec OX, l'angle

$$(X, Y) = \theta.$$

Donnons alors une droite parallèle à OY, MP, dont nous supposerons, pour plus de simplicité, l'abscisse $OP = a$ positive, et une droite OM, variable, que nous définirons par les angles de sa direction positive OZ avec les axes de coordonnées. En posant

$$(OX, OZ) = \alpha, \qquad (OZ, OY) = \beta.$$

nous aurons dans tous les cas, d'après les conventions précédentes,

$$\alpha - \beta = \theta.$$

Appelons c l'ordonnée du point M, et b la valeur algébrique du segment OM.

Définissons alors, au moyen de ces données et par des conditions géométriques bien déterminées, un système de points et de droites, et soit une relation entre les segments qui aboutissent à deux de ces points, l'un des deux étant choisi comme origine, et entre les angles de deux de ces droites, l'une étant prise comme droite-origine. Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sont les valeurs algébriques des segments et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ celles des angles, qui, d'après nos conventions, sont connues sans ambiguïté, la relation se mettra sous la forme

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, a, b, c, \alpha, \beta, \pi - \theta) = 0,$$

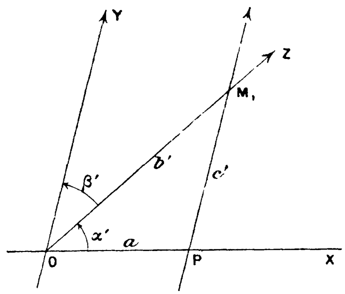
avec la condition $\alpha + \beta = \theta$, et cette formule est *générale,* car nous l'avons obtenue en nous servant de relations entre les *segments* et les *angles*, qui s'appliquent dans tous les cas. Cherchons à l'*interpréter* géométriquement.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où la direction positive OZ est à l'intérieur de l'angle XOY. Les segments a, b, c prennent alors des valeurs positives, a, b', c', et les angles α et β ont aussi des valeurs positives α' et β'. Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et $o_1, o_2, \ldots, o_n$ les valeurs absolues des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. On a alors la relation

$$(1)\quad \begin{cases} f(\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_p, \\ \quad \pm o_1, \pm o_2, \ldots, \pm o_n, a, b', c', \alpha', \beta', \pi - \theta) = 0, \end{cases}$$

qui, ayant lieu entre des quantités toutes positives, ne diffère pas d'une certaine relation *géométrique* entre les côtés et les angles du triangle OM_1P formé dans cette hypothèse, et les éléments déduits de ce triangle par les conditions géométriques données.

Fig. 1.



Dans l'hypothèse où la direction positive OZ est au contraire en dehors de l'angle XOY, les segments b et c prennent des valeurs négatives $-b''$ et $-c''$; l'angle β prend une valeur négative $-\beta''$; de sorte que la relation *géométrique* qui a lieu dans ce cas prend la forme

$$f(\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_p,\\ \pm o_1, \pm o_2, \ldots, \pm o_n, a, -b'', -c'', \alpha'', -\beta'', \pi-\theta) = 0.$$

ou, si l'on observe que les angles α'' et $\pi-\theta$ sont extérieurs au triangle OM_2P, formé dans cette hypothèse, et sont supplémentaires des angles correspondants du triangle, α_1 et θ,

$$f(\pm r_1, \ldots, \pm o_1, \ldots, a, -b'', -c'', \pi-\alpha_1, -\beta'', \pi-\theta) = 0.$$

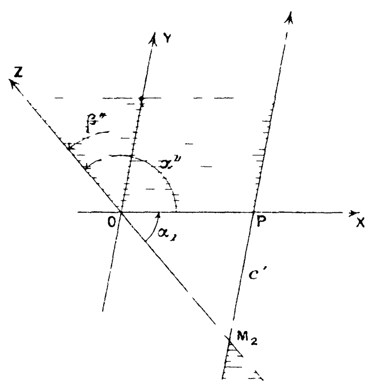
Mais cette relation géométrique a lieu, quel que soit le triangle; en l'appliquant au triangle OM_1P nous avons la relation géométrique

$$(2) \quad f(\pm r_1, \ldots, \pm o_1, \ldots, a, -b, -c', \pi-\alpha', -\beta', \theta) = 0.$$

d'où résulte bien évidemment le principe de M. Lemoine, tel que je l'ai énoncé.

Il faut remarquer que, si la relation générale est irrationnelle, le signe qui précède chaque radical n'est pas déterminé. Il ne se détermine que dans chaque cas de

Fig. 2.



figure, et, par suite, il est possible que, pour passer de la première relation géométrique qui résulte de la relation générale à la seconde relation géométrique, il soit nécessaire de changer le signe.

Appliquons le principe de M. Lemoine à un exemple particulier.

Menons par le point P la perpendiculaire à la bissectrice des deux demi-droites OX et OY; c'est une droite fixe D, qui est une bissectrice des deux droites OX et MP. Menons par le point O la bissectrice des deux demi-droites OX et OZ, qui rencontre la droite fixe D en un point variable I. Du point I, abaissons la perpendiculaire IH sur la droite OX; la direction positive est bien déterminée. Appelons ρ la valeur algébrique du segment IH. Cette quantité sera fournie par une relation où n'entreront que a, b, c, α et β,

$$f(\rho, a, b, c, \alpha, \beta, \pi - \theta) = 0.$$

Quand la droite OZ est entre OX et OY, le point I est le centre du cercle inscrit au triangle OM_1P; ρ est d'ailleurs négatif et sa valeur absolue est égale au rayon du cercle inscrit. On a alors la relation géométrique

$$f(-r, a, -b', -c', \alpha', \beta', \pi-\theta)=0.$$

Quand la droite Oz est en dehors de l'angle XOY, le point I est le centre du cercle exinscrit dans l'angle opposé au côté a du triangle OM_2P; ρ est encore négatif, et sa valeur absolue est égale au rayon r_a du cercle circonscrit. On a ainsi la relation géométrique

$$f(-r_a, a, -b'', -c''', \pi-\alpha_1, -\beta'', \pi-\theta),$$

et, si on l'applique au triangle OM_1P, on obtient

$$f(-r_a, a, -b, -c', \pi-\alpha', -\beta', \theta)=0,$$

ce qui montre que, dans la transformation de M. Lemoine, r se change en r_a.

Un raisonnement analogue montre que le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC se change en $-R$, que le rayon r_b du cercle exinscrit dans l'angle B se change en le rayon r_c du cercle exinscrit dans l'angle C.

Lorsque la droite OM tourne autour du point O dans le sens positif, le point M prend d'abord des positions telles que M_1; puis, après le passage à l'infini, des positions telles que M_2. Le triangle *fermé* OM_1P du premier cas devient, dans le second, le triangle *ouvert* OM_2P constitué par la portion du plan couverte de hachures; et la deuxième relation géométrique est, par rapport à ce triangle *ouvert*, l'analogue de la première appliquée au triangle *fermé* OM_1P. La transformation de M. Lemoine consiste, dès lors, à substituer aux éléments d'un triangle fermé de l'espèce OM_1P les éléments correspondants d'un triangle ouvert de l'espèce OM_2P.

Mais les deux triangles fermés M_1OP et M_2OP sont d'espèces différentes. Si l'on parcourt le contour du premier triangle dans le sens M_1OPM_1, on laisse l'aire comprise à sa gauche, le triangle M_1OP est orienté positivement; si l'on parcourt le contour du second triangle dans le sens M_2OPM_2, l'aire comprise est à droite, le triangle M_2OP est orienté négativement.

DEUXIÈME PARTIE.

Soient trois droites dont les équations sont

$$X = x\cos\lambda + y\sin\lambda - p = 0,$$
$$Y = x\cos\mu + y\sin\mu - q = 0,$$
$$Z = x\cos\nu + y\sin\nu - r = 0.$$

Elles se coupent deux à deux en trois points A, B, C et forment un triangle. Considérons une courbe géométriquement définie par rapport au triangle. Elle est évidemment indépendante de la position de l'origine et de la direction des axes de coordonnées.

Son équation cartésienne est de la forme

$$\varphi(x, y, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Remplaçons x et y par leurs expressions en fonction de X, Y, Z. On a alors identiquement

$$\varphi(x, y, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = f(X, Y, Z, p, q, r, \lambda, \mu, \nu),$$

et l'équation

$$f(X, Y, Z, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = 0$$

exprime la relation qui existe entre les trois valeurs que prennent les polynomes X, Y, Z, pour un point quelconque de la courbe. Elles sont indépendantes de la position de l'origine, du moins quand l'origine varie en restant toujours d'un même côté de chacune des trois droites, c'est-à-dire quand elle reste dans une même région du plan limitée par ces trois droites. La fonction qui les lie ne dépend donc pas de p, q, r. Mais ces valeurs ne dépendent évidemment pas non plus de l'axe Ox. Or, quand l'axe Ox tourne d'un angle θ positif ou négatif, les valeurs λ, μ, ν varient toutes trois dans le même sens de la même quantité θ. La fonction qui doit être indépendante de θ ne peut dépendre que des différences $\nu - \mu$, $\lambda - \nu$, $\mu - \lambda$.

Finalement l'équation en *coordonnées trilatères* est de la forme

$$F(X, Y, Z, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Cela posé, abaissons de l'origine O les perpendiculaires sur les côtés du triangle ABC; ces perpendiculaires rencontrant respectivement les côtés en L, M, N, considérons les directions positives OL, OM, ON et appelons λ, μ, ν les angles (OL, Ox) (OM, Ox), (ON, Ox). Ces angles sont définis à un multiple de 2π près.

Mais si nous laissons fixes les deux côtés AB et AC et si nous déplaçons le côté BC parallèlement à lui-même, nous pouvons prendre parmi les valeurs de μ et de ν deux valeurs déterminées qui sont alors des *données*. L'angle λ prend des valeurs connues à un multiple de 2π près et qui augmentent ou diminuent d'un multiple impair de π après le passage du côté BC par l'origine supposée fixe.

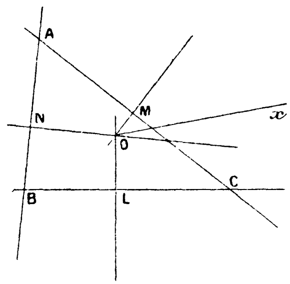
Pour toutes les positions du triangle ABC, l'équation de notre courbe reste

$$F(X, Y, Z, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Il y a deux cas à examiner, selon que la droite BC rencontre la perpendiculaire à cette droite menée par l'origine d'un côté ou de l'autre de l'origine.

Supposons d'abord que l'origine et l'axe Ox soient placés comme l'indique la *fig.* 3. Nous pouvons prendre pour μ et ν qui sont des données les plus petits angles

Fig. 3.



positifs que fait Ox avec OM et ON. Si λ_1 est le plus petit angle positif que fait Ox avec la direction OL, l'angle λ est de la forme $2h\pi + \lambda_1$.

A, B, C étant les angles *géométriques* du triangle ABC, on a alors

$$\begin{aligned}
\nu - \mu &= \pi - A,\\
\lambda - \nu &= 2h\pi + \pi - B,\\
\mu - \lambda &= -\pi - C - 2h\pi.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque les quantités p, q, r, qui sont les valeurs algébriques des segments OL, OM, ON sont positives, pour tout point qui est à l'intérieur du triangle ABC et qui, par suite, dans notre cas, est dans la même région que l'origine par rapport à chacun des côtés du triangle, les valeurs des polynomes X, Y, Z sont négatives et chacune d'elles devient positive dès que le point traverse le côté correspondant. Si donc nous affectons les distances géométriques du point aux trois côtés d'un signe : du signe + si le point est par rapport au côté dans la même région que le sommet opposé ; du signe —, s'il est dans l'autre région, et si nous désignons par X', Y',

Z' les valeurs algébriques ainsi obtenues, nous voyons que l'on a

$$X = -X', \qquad Y = -Y', \qquad Z = -Z',$$

et l'équation de la courbe C_1, *rapportée au triangle* ABC, est

$$F(-X', -Y', -Z', \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0,$$

ou, comme l'équation est homogène en X', Y', Z',

$$(1) \quad F(X', Y', Z', \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0.$$

Passons maintenant à l'autre cas qui comprend les *fig.* 4 et 5. Appelons λ_2 le plus petit angle positif

Fig. 4.

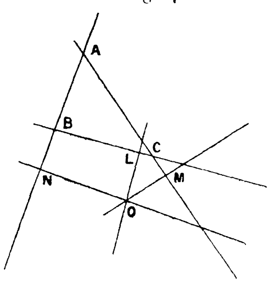
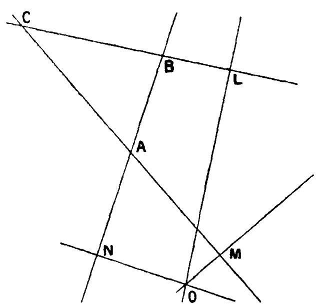


Fig. 5.



que fait Ox avec OL ; l'angle λ est de la forme $2k\Pi + \lambda_2$. A, B, C étant les angles *géométriques* du triangle ABC, on a

$$\begin{aligned} \nu - \mu &= \pi - A, \\ \lambda - \nu &= 2k\pi - B, \\ \mu - \lambda &= -C - 2k\pi. \end{aligned}$$

D'autre part, dans la *fig.* 4, les valeurs des polynomes Y et Z sont négatives pour tout point qui est, par rapport au côté, dans la même région que le sommet A. Donc, X', Y', Z' étant les valeurs algébriques définies plus haut,

$$X = X', \qquad Y = -Y'. \qquad Z = -Z'.$$

et l'équation de la courbe est

$$(2) \quad F(-X', Y', Z', \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$$

Dans la *fig.* 5, les valeurs des polynomes Y et Z deviennent positives pour tout point qui est par rapport au côté dans la même région que le sommet opposé, et la valeur du polynome X est négative quand le point est par rapport à BC du même côté que A. Donc

$$X = -X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z',$$

et l'équation est encore

$$(2) \quad F(-X', Y', Z', \pi - A, 2k\pi - B. -C - 2k\pi) = 0.$$

L'équation obtenue est rapportée à l'un ou l'autre des deux triangles qui constituent les *fig.* 4 et 5, et elle représente une courbe C_2 ou C'_2 dans chacune de ces figures. Mais, comme cette équation s'applique à un triangle de référence quelconque, si nous la supposons rapportée au triangle de la *fig.* 3, elle représentera dans cette figure une courbe C'_1 qui sera précisément l'analogue et même l'homothétique des courbes C_2 et C'_2. Les deux courbes C_1 et C'_1 sont définies, par rapport au triangle de la *fig.* 3, par les mêmes conditions géométriques. Donc, si, rapportée au triangle ABC,

$$(1) \quad F(X, Y, Z, \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -C - \pi - 2h\pi) = 0$$

est l'équation d'une courbe déterminée par rapport à ce triangle par certaines conditions géométriques,

$$(2) \quad F(-X, Y, Z. \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0$$

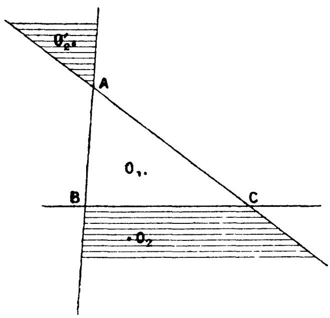
est celle d'une courbe déterminée par rapport au triangle par les mêmes conditions géométriques.

Si le problème n'est susceptible que d'une solution, comme, par exemple, la détermination d'un cercle passant par les trois sommets du triangle, les deux équations se ramènent à une seule. Si le problème a plusieurs solutions, comme la détermination d'un cercle tangent aux trois droites qui limitent le triangle, les deux équations représentent des courbes différentes.

On voit que l'on passe d'une des équations à l'autre en changeant X en $-$ X, Y en Y, Z en Z, et A en A, B en $B-(2m+1)\pi$, C en $C+(2m+1)\pi$, m étant un entier arbitraire positif ou négatif.

Les trois triangles 3, 4 et 5 ont même orientation, c'est-à-dire que le contour ABCA peut être parcouru

Fig. 6.



dans le même sens. En faisant varier les trois figures semblablement à elles-mêmes et en les déplaçant dans le plan, on peut donc amener les trois triangles en coïncidence et les origines prennent alors les positions O_1, O_2 et O'_2.

L'équation générale

$$F(X, Y, Z, \nu-\mu, \lambda-\nu, \mu-\lambda)=0$$

est l'équation d'une courbe satisfaisant aux conditions données, quelle que soit la position de l'origine par rapport au triangle ABC. Elle prend la forme (1) pour toutes les positions de l'origine telles que O_1, qui sont à l'intérieur du triangle, et la forme (2) pour les positions telles que O_2 et O'_2 comprises à l'intérieur de l'angle A et extérieures au triangle ABC. Le triangle ABC, c'est-à-dire l'espace *fermé,* qui est limité par les trois côtés du triangle, est le lieu des origines pour lesquelles l'équation générale prend la forme (1), et l'espace *ouvert,* qui est la partie du plan couverte de hachures, est le lieu des origines pour lesquelles l'équation générale prend la forme (2).

On aperçoit donc, et il n'est guère possible de donner à ces considérations une forme plus précise, que l'équation (1) correspond à l'espace *fermé,* comme l'équation (2) à l'espace *ouvert,* et que la transformation par laquelle on passe de la courbe C_1 à la courbe C'_1 revient à substituer à un élément lié à l'espace *fermé* l'élément correspondant lié de la *même* façon à l'espace *ouvert.* Ainsi, le cercle inscrit à l'espace fermé, c'est-à-dire le cercle inscrit au triangle géométrique ABC, se transformera en le cercle inscrit à l'espace ouvert, c'est-à-dire le cercle exinscrit au triangle dans l'angle A; le centre du cercle inscrit se transformera en le centre de ce cercle exinscrit; c'est ce que confirme le calcul direct.

Abaissons de l'origine O les perpendiculaires OL, OM, ON sur les côtés du triangle ABC, et appelons, comme plus haut, λ, μ, ν les angles

$$(\mathrm{OL}, \mathrm{O}x), \quad (\mathrm{OM}, \mathrm{O}x), \quad (\mathrm{ON}, \mathrm{O}x),$$

connus à un multiple de 2π près.

Nous désignerons par c, a, b les valeurs algébriques des segments $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$, comptés sur les directions positives $\nu + \frac{\pi}{2}$, $\lambda + \frac{\pi}{2}$, $\mu + \frac{\pi}{2}$.

Envisageons des systèmes de points et de droites géométriquement définis par rapport au triangle ABC et soit une relation entre les segments qui aboutissent à deux de ces points, l'un des deux étant pris comme origine, et entre les angles de deux de ces droites, l'une étant choisie comme droite origine. Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont les valeurs algébriques de ces segments et de ces angles, cette relation se mettra sous la forme générale

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, a, b, c, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Pour chacun des deux cas que nous avons distingués précédemment, mettons en évidence dans la formule générale les valeurs arithmétiques des segments ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_p$, a, b, c et les valeurs de sangles *géométriques* compris entre les droites. Nous connaissons dans les deux cas les valeurs de $\nu - \mu$, $\lambda - \nu$, $\mu - \lambda$ en fonction des angles A, B, C du triangle. D'autre part, dans la *fig.* 3, a, b, c sont positifs; dans la *fig.* 4, a est négatif, b et c sont négatifs. La relation algébrique fournit pour les trois figures une relation géométrique entre des longueurs et des angles. Mais la relation de la *fig.* 5 se ramène à celle de la *fig.* 4. Les triangles de ces deux figures sont, en effet, homothétiques inverses et, si l'on compte deux segments homologues sur la même direction, les valeurs algébriques de ces segments sont proportionnelles et de signe contraire. Les deux relations étant homogènes par rapport aux longueurs, il suffit donc de changer le signe des longueurs dans l'une pour obtenir l'autre.

Il reste ainsi deux formes de la relation générale entre les segments et les angles du système de points et de droites géométriquement défini par rapport au triangle, qu'on déduit l'une de l'autre, lorsqu'on remplace les côtés a', b', c' du triangle par a', $-b'$, $-c'$, et les angles A, B, C par A, $B-(2m+1)\pi$, $C+(2m+1)\pi$. Si nous *interprétons* géométriquement, pour chaque cas de figure, les valeurs algébriques des segments et des angles du système, nous obtenons deux relations géométriques entre des longueurs et des angles géométriques.

Donnons un exemple. Considérons le point I tel que les polynomes X, Y, Z aient des valeurs égales; abaissons de ce point la perpendiculaire sur le côté variable BC et sur cette droite prenons une direction fixe comme direction positive. Appelons ρ la valeur algébrique du segment qui a son origine au point I et qui aboutit au pied P de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le côté BC. Or, le côté BC restant fixe, le point I est défini indépendamment de la position de l'origine, du moins quand elle reste dans une même région limitée par les trois droites AB, BC, CA, et indépendamment de l'orientation de l'axe Ox. Donc ρ sera fourni par une relation où n'entreront que les éléments du triangle ABC, qui sont indépendants de la position de l'origine et de l'orientation de l'axe Ox, c'est-à-dire, en dernière analyse, les éléments a, b, c définis plus haut et les différences $\nu-\mu$, $\lambda-\nu$, $\mu-\lambda$. Soit cette relation

$$f(\rho, a, b, c, \nu-\mu, \lambda-\nu, \mu-\lambda)=0.$$

Puisque pour le point I les polynomes X, Y, Z ont le même signe, ce point est, par rapport à chacun des côtés, dans la même région que l'origine. Donc, dans la *fig.* 3, le point I est le centre du cercle inscrit au triangle, et, dans la *fig.* 4, c'est le centre du cercle exinscrit au triangle dans l'angle A.

Interprétons géométriquement, dans chacune de ces deux figures, la relation générale. Si la direction positive fixe sur laquelle est compté le segment variable IP est convenablement choisie, pour la première figure, ρ est positif et égal à $+r_1$, r_1 étant le rayon du cercle inscrit au triangle ABC. D'ailleurs, dans ce cas, a, b, c sont positifs et ont pour valeurs a_1, b_1, c_1, longueurs des côtés du triangle ABC. La relation générale devient la relation géométrique

$$f(r_1, a_1, b_1, c_1, \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0.$$

Dans la seconde figure, ρ est négatif et a pour valeur absolue $r_{a,2}$, rayon du cercle exinscrit dans l'angle A. D'autre part, a est négatif, b et c sont positifs, leurs valeurs absolues sont a_2, b_2, c_2, longueurs des côtés du triangle. La relation générale revient donc, dans ce cas, à la relation géométrique

$$f(-r_{a,2}, -a_2, b_2, c_2, \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$$

Cette relation, s'appliquant à tous les triangles, devient, dans le triangle 3,

$$f(-r_{a,1}, -a_1, b_1, c_1, \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$$

On voit que l'élément $-r_a$ correspond au triangle *ouvert*, comme l'élément r correspond au triangle *fermé*.

Il apparaît ainsi que trois droites dans un plan le partagent en quatre espaces, dont un *fermé* et trois *ouverts*, et que l'élément $-r$ correspond à l'espace fermé, comme les éléments r_a, r_b, r_c, ce qui revient à dire que les éléments $-r$, r_a, r_b, r_c sont les solutions d'un même problème : *Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois droites*. Il en est de même des éléments $-p$, $p-a$, $p-b$, $p-c$. C'est ce que confirme le calcul direct; nous avons, par exemple, les formules bien connues

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = 0,$$
$$-r + r_a + r_b + r_c = 4R,$$
$$(-r)(r_a)(r_b)(r_c) = -S^2$$

et

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c - r r_a - r r_b - r r_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

d'une part, et, d'autre part,

$$(-p)(-r) = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c,$$
$$-p + (p-a) + (p-b) + (p-c) = 0,$$
$$(-p)(p-a)(p-b)(p-c) = -S^2.$$

Nous avons considéré dans nos figures des triangles ABC dont les côtés varient en restant parallèles à des directions fixes, mais dont on peut parcourir le contour ABCA dans le sens positif des angles employés en Trigonométrie. Nous disons qu'ils sont orientés positivement. Mais il est d'autres triangles dont les côtés sont parallèles aux mêmes droites et dont le contour ABCA est parcouru dans le sens négatif : ils sont orientés négativement.

Prenons un triangle de chaque espèce et, pour chacun d'eux, plaçons l'origine à l'intérieur. Dans le premier cas, les segments a, b, c sont positifs et, dans le second, ils sont négatifs. On voit ainsi l'utilité, pour la généralité des formules, de considérer les côtés d'un triangle, non plus comme des longueurs, mais comme des segments.

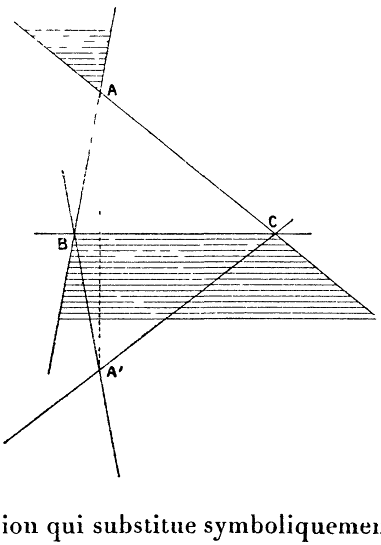
Il est de même utile de considérer la surface d'un triangle comme une quantité algébrique. On lui donnera, par exemple, le signe + pour un triangle orienté positivement, et le signe — pour un triangle orienté négativement.

La transformation à laquelle nous sommes parvenu n'est pas la transformation de M. Lemoine. Or, si l'on se reporte à la première Partie de ce travail, on voit que la transformation de M. Lemoine consiste à substituer symboliquement à l'espace fermé A'BC l'espace ouvert

ABC couvert de hachures, A_1 et A' étant deux points symétriques par rapport à BC. Notre transformation consiste, au contraire, à substituer symboliquement à l'espace fermé ABC l'espace ouvert ABC, relatif à l'angle A. Pour obtenir la transformation de M. Lemoine il suffit d'effectuer, avant notre transformation, une autre transformation qui consiste à substituer à l'espace fermé A'BC l'espace fermé ABC, c'est-à-dire à substituer à un espace fermé orienté négativement un espace orienté positivement.

Donnons un exemple. Notre transformation fait correspondre, comme nous l'avons vu, $-r$ et r_a. Mais la

Fig. 7.



transformation qui substitue symboliquement à l'espace fermé A'BC l'espace fermé ABC fait évidemment correspondre $-r$ et $+r$. Donc, par la transformation de M. Lemoine, r se change en r_a; c'est ce que confirme le calcul.