Nouvelles annales de mathématiques

S. Mangeot

Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 215-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__215_1>

[M¹3e] [M²2e]

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE DE RECHERCHE DES CENTRES DANS LES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Je considère un polynome entier $f(x, y, z, \ldots)$ à n variables $x, y, z, \ldots$, de degré m, et je suppose que, ayant calculé l'une quelconque

$$Ax + By + Cz + \ldots + H = u \qquad (A \neq 0$$

de ses dérivées partielles d'ordre $m - 1$ (ce qui se fait immédiatement à l'inspection du polynome), on ordonne le polynome $f\left(2x - \frac{u}{A}, y, z, \ldots\right)$ suivant les puissances de x. Soit $\sum x^\lambda \varphi_\lambda(y, z, \ldots)$ ce dernier polynome ainsi ordonné. La fonction $f(x, y, z, \ldots)$ peut s'écrire $\sum \left(\frac{u}{A}\right)^\lambda \varphi_\lambda(y, z, \ldots)$, et l'on vérifie sans difficulté cette proposition :

Pour que l'on ait

$$\begin{aligned} &f(x + x_0, y + y_0, z + z_0, \ldots) \\ &\quad = \varepsilon f(-x + x_0, -y + y_0, -z + z_0, \ldots) \qquad (\varepsilon = \pm 1), \end{aligned}$$

$x_0, y_0, z_0, \ldots$ étant des constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$A x_0 + B y_0 + C z_0 + \ldots + H = 0,$$

$$\varphi_\lambda(y + y_0, z + z_0, \ldots) = (-1)^\lambda \varepsilon \varphi_\lambda(-y + y_0, -z + z_0, \ldots)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots) \ (^1).$$

Dès lors, étant donné un polynome entier

$$f(x, y, z, \ldots)$$

à n variables, si l'on se propose de chercher à donner à ces variables des accroissements tels que la nouvelle expression du polynome ne change pas, en valeur absolue, quand on y change les signes de toutes les variables, ce problème peut être ramené à un problème analogue à traiter sur des polynomes entiers

$$\varphi_\lambda(y, z, \ldots)$$

dépendant de $n - 1$ variables au plus, et calculés comme je viens de le dire. Il pourra donc être résolu par des

---

[1] Si un polynome entier en $x, y, z, \ldots$ satisfait à l'identité $F(x + x_0, y + y_0, z + z_0, \ldots) = \pm F(-x + x_0, -y + y_0, -z + z_0, \ldots)$, toutes ses dérivées partielles y satisfont aussi.

applications successives de cette méthode; car on sait résoudre le problème dans le cas d'une seule variable.

Je vais donner la solution de la question par cette méthode lorsque la fonction f ne dépend que de 2 ou de 3 variables : le problème est ici identique à celui de la recherche des centres dans les courbes et dans les surfaces algébriques.

Cas des courbes. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation entière et cartésienne d'une courbe plane d'ordre m, non formée uniquement de droites parallèles.

Je prends à volonté un terme de degré m dans le polynome $f(x, y)$, et, x étant une variable entrant dans ce terme, soient $ax^p y^q$ ce terme, b et c les coefficients des termes en $x^{p-1}y^{q+1}$ et $x^{p-1}y^q$; $\varphi(y)$ un coefficient non constant d'une puissance quelconque de x dans le polynome $f\left[x - \frac{b(q+1)y + c}{ap}, y\right]$, y compris la puissance x^0; $\alpha y^\mu + \beta y^{\mu-1} + \ldots$ le polynome $\varphi(y)$ ordonné suivant les puissances décroissantes de y.

La courbe n'a pas de centre en dehors du point d'intersection des deux droites

$$apx + b(q+1)y + c = 0, \qquad \mu\alpha y + \beta = 0,$$

point qui est déterminé et situé à distance finie.

On essayera si ce point est centre de la courbe [1].

Cas des surfaces. — Soient $f(x, y, z) = 0$ l'équation entière et cartésienne d'une surface d'ordre m, ren-

---

[1] Pour que la courbe $f(x, y) = 0$ soit un système de droites concourantes, il faut et il suffit que le polynome

$$f\left[x + \frac{b(q+1)\beta - c\mu\alpha}{ap\mu\alpha}, y - \frac{\beta}{\mu\alpha}\right]$$

soit homogène.

fermant les trois variables x, y, z; $ax^p y^q z^r$ un terme de degré m pris à volonté dans le polynome $f(x, y, z)$ et contenant, par exemple, la variable x; b, c, d les coefficients des termes en $x^{p-1} y^{q+1} z^r$, $x^{p-1} y^q z^{r+1}$, $x^{p-1} y^q z^r$; et soit enfin $\sum x^\lambda \varphi_\lambda(y, z)$ le polynome $f\left[x - \frac{b(q+1)y + c(r+1)z + d}{ap}, y, z\right]$ ordonné suivant les puissances de x.

Pour que la surface ait un centre, il faut que celles des fonctions $\varphi_\lambda(y, z)$ qui ne sont pas nulles aient toutes leur degré de la même parité que λ, ou aient toutes leur degré de parité contraire à celle de λ. Quand cette condition est remplie, les centres de la surface sont les points du plan

$$apx + b(q+1)y + c(r+1)z + d = 0$$

dont les projections sur le plan des yz (faites parallèlement à l'axe des x) seraient des centres communs aux courbes de ce plan des yz qui ont les équations

$$\varphi_\lambda(y, z) = 0 \ (^1).$$

On est ainsi ramené à chercher les centres de courbes planes (²).

(¹) On regarde une courbe rejetée à l'infini ou indéterminée comme ayant pour centre tout point de son plan.

(²) Pour que l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente un cône il faut et il suffit que celles des fonctions $\varphi_\lambda(y, z)$ qui ne sont pas nulles aient leur degré égal à $m - \lambda$, et que le produit de ces fonctions, égale à zéro, définisse un système de droites ayant un point commun (y_0, z_0). Le sommet du cône est le point qui a pour coordonnées

$$x = -\frac{b(q+1)y_0 + c(r+1)z_0 + d}{ap}, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$