Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 179-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__179_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 41 [1].

(1842, p. 396.)

Un géomètre anglais vient de démontrer que toute équation du cinquième degré peut se réduire à la forme

$$x^5 + x + a = 0.$$

NOTE

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

La méthode dont il s'agit est aujourd'hui devenue classique, sous le nom de *théorème de Jerrard*. Elle procède de celle de Tschirnaüs, pour la disparition de certains termes d'une équation. On en trouve notamment un exposé très clair dans la *Théorie des équations algébriques* de M. Petersen (traduction française, 1897, p. 83-85). On établit ainsi, pour le cas du 5ᵉ degré, que l'équation générale peut être ramenée à la résolution d'une autre équation de la forme $x^5 + px + q = 0$,

(1) Nous commençons aujourd'hui la revision de certaines questions anciennes qui n'ont pas été resolues jusqu'ici dans les *Nouvelles Annales*, et qu'il convient de faire disparaître de la liste des questions sans solution ; les unes, comme la question **41**, par exemple, sont devenues classiques ; d'autres sont insolubles dans l'état présent de la Science, comme la suivante (question **48**). Quant aux problèmes abordables, et pas encore résolus, nous nous réservons de les rappeler successivement, comme nous avons déjà commencé à le faire, en tête des *questions proposées* dans les divers numéros, et en ayant soin d'en indiquer l'origine première. Ce seront encore, à l'heure actuelle et même après plus d'un demi-siècle, des exercices utiles et intéressants. (*Note de la Rédaction.*)

qui, par le changement de x en λx, conduit immédiatement à celle de l'énoncé. Pour arriver à ce résultat, il n'est besoin que de résoudre des équations du troisième degré.

Question 48.

(1842, p. 520.)

Deux nombres consécutifs, autres que 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes.* (CATALAN.)

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

Ce théorème a été souvent réédité depuis 1842: il fait partie de la série des propositions que Catalan appelait des *théorèmes empiriques*. Dans l'état présent de l'avancement de la Théorie des nombres, la démonstration semble impossible à obtenir. Lionnet, qui s'intéressait au plus haut point aux questions d'Arithmologie, m'a même déclaré plusieurs fois qu'il inclinait à croire la proposition fausse, bien que personne ne fût parvenu à la mettre en défaut par un exemple numérique. Cette opinion ne dérivait d'ailleurs que du sentiment et aussi d'un certain instinct des probabilités, que Lionnet apportait volontiers dans ces sortes de questions, mais qui est, on doit l'avouer, bien trompeur en de telles matières.

En somme, cette question, comme le théorème de Goldbach, comme celui de Fermat et comme plusieurs autres, doit être rangée parmi les desiderata de la Théorie des nombres, et ce n'est pas probablement le XIX[e] siècle qui en verra la solution.

Question 156.

(1847, p. 243.)

Par un point M *d'une conique on mène les cordes* MA, MB, MC, ...; *par les points* A, B, C, ..., *on mène des droites respectivement conjuguées aux droites* MA, MB, MC, ...; *toutes ces droites concourent en un même point situé sur la conique.* (PAUL SERRET.)

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

La propriété est évidente pour la circonférence et s'étend par projection à toutes les coniques. L'extrême simplicité d'une telle question semble seule expliquer qu'aucune solution n'ait été publiée. Directement, on voit aussi que les droites conjuguées, cordes supplémentaires de MA, MB, ..., concourent au point M′ diamétralement opposé à M.

Question 176.

(1848, p. 45.)

Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs d'hyperboles équilatères ayant le même centre, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera une ellipse de Cassini. (STREBOR.)

SOLUTION

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

On sait et l'on vérifie immédiatement que si $OD = f(t)$ est l'équipollence d'une droite, $OH = \sqrt{OD}$ est l'équipollence d'une hyperbole équilatère, dont le centre est l'origine ; et que si $OC = \varphi(t)$ est l'équipollence d'une circonférence, $OE = \sqrt{OC}$ est celle d'une ellipse de Cassini. Ceci posé, soient P, Q les extrémités de la base du triangle curviligne, R le sommet variable. Prenant le point O, centre des hyperboles, pour origine, effectuons sur la figure la transformation représentée par $OM' = \overline{OM}^2$. Les arcs d'hyperboles PR, QR se transforment en deux droites P′R′, Q′R′; et comme la transformation est isogonale, l'angle en R′ est égal à l'angle en R, c'est-à-dire constant. Le lieu de R′ est donc une circonférence, et, en effectuant la transformation inverse $OR = \sqrt{OR'}$, nous aurons pour lieu de R′ une ellipse de Cassini.

Remarque. — Ce mode de démonstration permet d'établir une foule de propositions, corrélatives de celles qui ont trait à la ligne droite. Par exemple :

1° Dans le triangle curviligne de l'énoncé, la somme des trois angles est de deux droits ;

2° Toute trajectoire orthogonale d'arcs d'hyperboles équilatères issus d'un même point et ayant un centre commun est une ellipse de Cassini.

Question 187.

(1848, p. 240 ; 1898, 99.)

Deux côtés d'un angle droit touchent deux coniques confocales situées dans le même plan; le lieu du sommet est un cercle; la droite qui réunit les deux points de contact a pour enveloppe une conique. (CHASLES.)

SOLUTION

Par M. DONON, élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

I. Supposons les deux coniques rapportées à leurs axes; nous pouvons prendre leurs équations sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 = 0.$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha+\lambda} + \frac{y^2}{\beta+\lambda} - 1 = 0.$$

Une tangente à la conique (1) de coefficient angulaire m a pour équation

$$(3) \qquad y = mx + \sqrt{\alpha m^2 + \beta};$$

une tangente à la conique (2) perpendiculaire à la précédente a pour équation

$$(4) \qquad my = -x + \sqrt{\alpha + \beta m^2 + \lambda(1+m^2)}.$$

De sorte qu'un point du lieu est défini par les équations (3) et (4). Pour faire l'élimination de m entre ces deux équations écrivons-les

$$y - mx = \sqrt{\alpha m^2 + \beta},$$
$$my + x = \sqrt{\alpha + \beta m^2 + \lambda(1+m^2)}.$$

puis faisons la somme des carrés, ce qui donne

$$(x^2+y^2)(1+m^2)=(\alpha+\beta+\lambda)(1+m^2).$$

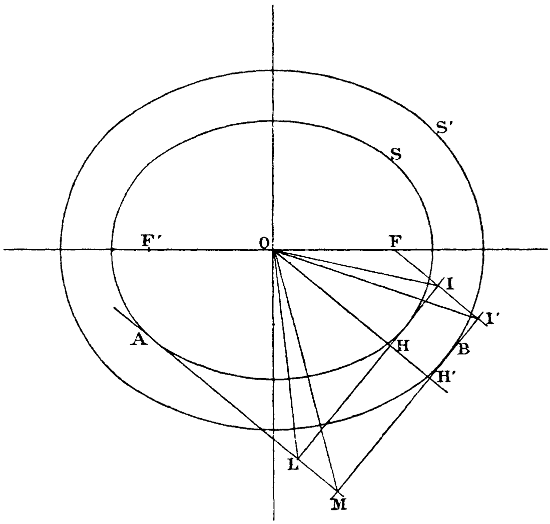
Supprimons le facteur $1+m^2$ qui correspond évidemment aux droites isotropes issues des foyers communs; il reste alors le lieu demandé

$$x^2+y^2=\alpha+\beta+\lambda;$$

c'est donc une circonférence concentrique aux ellipses données.

Solution géométrique. — Soient S et S' les deux coniques, M un point du lieu. Considérons une tangente HL à S paral-

Fig. 1.



lèle à BM. Montrons d'abord que si l'on mène OH' perpendiculaire sur BM, on a

$$\mathrm{OH}'^2-\mathrm{OH}^2=\lambda.$$

Pour cela, menons FI' perpendiculaire sur BM. Dans le triangle rectangle OH'I' on a

$$\mathrm{OH}'^2=\mathrm{OI}'^2-\mathrm{H'I'}^2=\alpha+\lambda-\mathrm{H'I'}^2;$$

le triangle OHI donne, de même,

$$OH^2 = OI^2 - HI^2 = \alpha - HI^2;$$

en retranchant membre à membre et en tenant compte de ce que $H'I' = HI$, on obtient

$$OH'^2 - OH^2 = \lambda.$$

Ceci posé, cherchons à évaluer OM. On a, dans le triangle rectangle OMH',

$$OM^2 = OH'^2 - MH'^2 = OH'^2 - LH^2.$$

Mais le triangle OHL donne

$$LH^2 = OL^2 - OH^2 = \alpha + \beta - OH^2;$$

on en déduit

$$OM^2 = OH'^2 - OH^2 + \alpha + \beta = \alpha + \beta - \lambda.$$

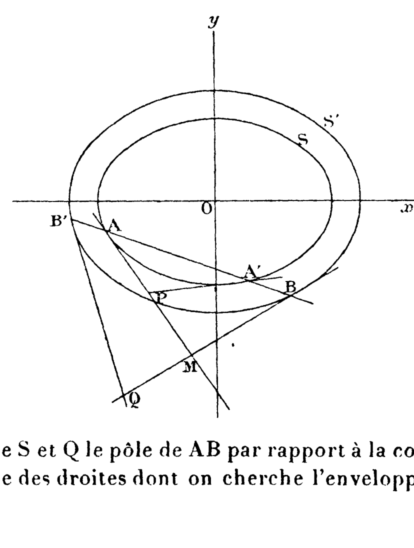
Donc le lieu du point M est une circonférence dont le carré du rayon est égal à $\alpha + \beta + \lambda$.

II. Cherchons l'enveloppe de la droite AB. Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite AB. Soient P le pôle de AB par rapport

Fig. 2.



à la conique S et Q le pôle de AB par rapport à la conique S'. Si AB est l'une des droites dont on cherche l'enveloppe, l'une des tangentes menées de P à la conique S doit être perpendiculaire à l'une des tangentes menées de Q à la conique S'. Si donc on forme d'une part l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de P à la conique S, d'autre part l'équation aux coefficients angulaires des perpendiculaires aux tangentes menées de Q à la conique S', ces deux équations devront avoir une solution commune.

Or les coordonnées du point P sont $\frac{-\alpha u}{w}\ \frac{-\beta v}{w}$, donc l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de P à la conique S est

$$\left(\frac{-\beta v}{w} + m\frac{\alpha u}{w}\right)^2 = \alpha m^2 + \beta,$$

$$(5)\qquad \alpha m^2(\alpha u^2 - w^2) - 2\alpha\beta uvm + \beta(\beta v^2 - w^2) = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites QB, QB' sera de même, en posant $\alpha' = \alpha + \lambda$, $\beta' = \beta + \lambda$,

$$\alpha' m^2(\alpha' u^2 - w^2) - 2\alpha'\beta' uvm + \beta'(\beta' v^2 - w^2) = 0.$$

Donc l'équation aux coefficients angulaires des perpendiculaires à ces droites sera

$$(6)\qquad \beta' m^2(\beta' v^2 - w^2) + 2\alpha'\beta' uvm + \alpha'(\alpha' u^2 - w^2) = 0.$$

Nous aurons donc l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant m entre les équations (5) et (6).

Éliminons le terme en m entre les équations (5) et (6); pour cela multiplions la première équation par $\alpha'\beta'$, la deuxième par $\alpha\beta$ et ajoutons membre à membre. On obtient

$$\begin{aligned} &m^2\alpha\beta'[\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - w^2(\alpha' + \beta)] \\ &\quad + \alpha'\beta[\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - w^2(\alpha + \beta')] = 0, \end{aligned}$$

mais on a $\alpha' + \beta = \alpha + \beta' = \alpha + \beta + \lambda$; donc l'équation précédente nous donne

$$\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - (\alpha + \beta + \lambda) w^2 = 0;$$

c'est l'équation cherchée. Elle représente une conique rapportée à ses axes. Si l'on fait la différence des carrés des longueurs des derniers axes, on trouve, en posant $\alpha - \beta = c^2$,

$$\frac{\alpha(\alpha + \lambda) - \beta(\beta + \lambda)}{\alpha + \beta + \lambda} = \frac{c^2(\alpha + \beta) + \lambda c^2}{\alpha + \beta + \lambda} = c^2;$$

donc la conique trouvée est une conique homofocale aux deux coniques données.

Autres solutions de MM. Audibert et E.-N. Barisien.

M. E. Bally nous fait remarquer qu'il a résolu et généralisé la question dans un article : *Notes de Géométrie relatives à un théorème de Chasles*, publié dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (mai 1897).

Question 199.

(1849, p. 44.)

Expliquer *clairement* ce qu'il faut entendre par *tétraèdres semblablement situés* dans la théorie des polyèdres semblables.

NOTE

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

Sans vouloir pénétrer le fond de la pensée de l'auteur de la question, à près de cinquante années de distance, il nous paraît tout simple de répondre à son désir. Si deux polyèdres (P), (P′) sont semblables et ont pour rapport de similitude α, il suffit de transformer (P) en prenant un centre d'homothétie quelconque, et le rapport d'homothétie α, pour obtenir un polyèdre (P_1) superposable à (P′). Si, dans ces deux derniers polyèdres, (T_1) et (T′) sont deux tétraèdres correspondants, c'est-à-dire superposables lorsque (P_1) se superpose à (P′), et si en effectuant la transformation homothétique inverse (T) est le tétraèdre transformé de (T_1), alors (T) et (T′) seront deux tétraèdres homologues, et semblablement situés par rapport aux tétraèdres voisins.

La difficulté est plus grande peut-être dans le plan, parce que l'on confond à tort en général deux modes de similitude différents : dans la similitude directe, si le rapport de similitude devient égal à l'unité, la superposition des figures est possible, *par simple glissement dans le plan :* dans la similitude symétrique, la superposition ne peut s'effectuer que *par un retournement* de la figure, c'est-à-dire en sortant du plan.

Comme dans l'espace ce retournement est impossible, on ne dit pas que deux polyèdres sont égaux quand par une translation ils peuvent être rendus symétriques; ni qu'ils sont semblables lorsque, par une transformation homothétique et une translation, ils peuvent aussi être rendus symétriques. C'est peut-être un tort; la distinction de l'égalité directe et de l'égalité symétrique, de la similitude directe et de la similitude symétrique serait de nature à éclaircir beaucoup le langage et les idées.

Question 243.

(1851, p. 318)

Soit l'équation

$$\begin{aligned}(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_8)(x-a_9)\ldots(x-a_{4n})\\ +b^m(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)(x-a_7)\ldots(x-a_{4n-1})=0;\end{aligned}$$

les indices augmentent successivement d'une unité et de trois unités; les différences a_1-a_2, a_2-a_3, ..., $a_{4n-1}-a_{4n}$ sont positives; b est un nombre positif; m est un nombre entier positif; les $2n$ racines sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, ..., a_{4n-1} et a_{4n}. (RICHELOT.)

SOLUTION

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

Les lettres a comprises dans les deux termes sont respectivement

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_4\,a_5 & & a_8\,a_9 & \ldots & a_{4n-4}\,a_{4n-3} & & & & a_{4n}\\ & a_2\,a_3 & & a_6\,a_7 & & \ldots & & & a_{4n-2}\,a_{4n-1} & & \end{array}$$

En substituant à x la valeur a_{4p} le premier terme s'annule; le deuxième contient un nombre pair de facteurs négatifs; donc $f(a_{4p})>0$, en appelant $f(x)$ le premier membre de l'équation.

En substituant a_{4p+1}, les mêmes faits se produisent;

$$f(a_{4p+1})>0.$$

En substituant a_{4p+2}, le nombre des facteurs négatifs du premier terme est impair; le deuxième est nul; donc

$$f(a_{4p+2})<0.$$

En substituant a_{4p+3}, les mêmes faits se produisent;

$$f(a_{4p+3})<0.$$

Enfin $f(a_{4p+4})$ a le même signe que a_{4p}, ou

$$f(a_{4p+4}) > 0.$$

La proposition est donc établie. On aurait pu remplacer b^m par un nombre positif quelconque. Il semble que l'énoncé ait été compliqué comme à plaisir.

Question 341.

(1856, p. 353.)

Soient AB, A'B', A''B''. ... *un système de forces en équilibre dans un plan.* A, A', A'', ... *sont les points d'application;* AB, A'B', ... *représentent les intensités et les directions des forces; par un point quelconque* M *du plan, soient menées aux droites* AB, A'B', A''B'', ... *des droites* ME, ME', ME'', ... *sous un angle constant* α; *de telle sorte qu'en faisant tourner une de ces droites* ME' *autour de* M *jusqu'à ce qu'elle coïncide avec* ME, *alors* A'B' *devienne parallèle à* AB, ...; *la somme des produits*

$$AB.EA - A'B'.E'A' + A''B''.E''A'' + \ldots$$

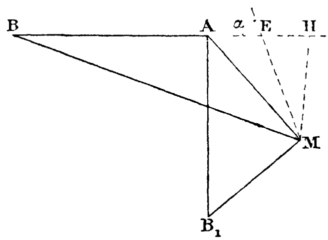
est constante quelles que soient la position du point M *et la grandeur de l'angle* α, *et selon que cette somme est positive, nulle ou négative, l'équilibre est stable, permanent ou instable.* (MÖBIUS).

SOLUTION

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

Rappelons d'abord qu'un système de forces *quelconques* dans un plan étant donné, il existe sur ce plan un centre G des forces, et qui est tel que si toutes les forces tournent d'un même angle dans le même sens autour de leurs points d'application, la résultante, appliquée en G, tourne dans le même sens et du même angle autour de G. D'après cela, si un système de forces est en équilibre, et si on les divise en deux groupes, chacun d'eux ayant pour centre G_1, G_2 respectivement, le système se réduira à deux forces égales et opposées R_1, R_2 appliquées en G_1, G_2. Suivant que ces forces, si l'on considère G_1G_2 comme une barre rigide tendront à l'allonger, ou à la comprimer, l'équilibre sera stable ou instable. Cela revient à dire que, si l'on fait tourner les forces d'un angle droit dans le sens positif, le couple ainsi obtenu sera positif ou négatif suivant que l'équilibre sera stable ou instable. S'il était permanent, les deux points G_1, G_2 coïncideraient.

Cela posé, revenons à l'énoncé, et considérons une des forces AB; soient ME la droite qui fait avec elle l'angle α,



MH $= h$ la perpendiculaire abaissée de M sur AB, et posons HA $= a$. On a

$$EA = HA - HE = a - h\cot\alpha, \qquad EA, AB = (a - h\cot\alpha)AB.$$

Or $h.AB = 2(MAB)$, $a.AB = 2OAB_1$, AB_1 étant la nouvelle position de AB après une rotation positive d'un angle droit autour de A. Il est facile de reconnaître que ces relations sont vraies en grandeurs et en signes.

La somme cherchée $\Sigma(EA.AB)$ est donc

$$2\Sigma(MAB_1) - 2\cot\alpha\,\Sigma(MAB) = 2\Sigma(MAB_1),$$

car $\Sigma(MAB) = 0$, le système AB, A'B', ... étant en équilibre par hypothèse.

Groupons maintenant nos forces en prenant AB d'une part, et le système A'B', A''B'', ... de l'autre. Le premier centre G_1 sera A, et l'autre G_2 sera donné par l'équipollence

$$MG_2(\text{cj}\,A'B' - \text{cj}\,A''B'' + \ldots) = MA'.\text{cj}\,A'B' + MA''.\text{cj}\,A''B'' + \ldots,$$

quel que soit le point M. Il suit de là que, le système se réduisant à AB appliquée en A et à $-$AB appliquée en G_2, le couple résultant d'une rotation de ces deux forces d'un angle droit dans le sens positif aura pour expression

$$2\,MAB_1 + 2(MA'B'_1 + MA''B''_1 + \ldots),$$

c'est-à-dire précisément $\Sigma(EA.AB)$. Si l'on tient compte des remarques préalables qui précèdent, la proposition est donc complètement établie.

Question 831.

(1867, p. 479)

Soient α, β, γ, δ, ε *cinq quantités quelconques. Posons*

$$A = (\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$B = (\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 - (\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$C = (\alpha-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2 - (\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2,$$
$$D = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2,$$
$$E = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2;$$
$$\Pi = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2 \times(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2$$
$$P = \sum(\alpha-\beta)^4(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2.$$

Démontrer la relation suivante

$$ABCDE - 2P^2 = 24\,\Pi.$$

(MICHAEL ROBERTS).

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Si l'on pose $\Delta = ABCDE - 2P^2$, il s'agit d'établir l'identité

$$\Delta = 24\,\Pi. \tag{1}$$

En supposant $\alpha = \beta$, on a

$$B = A,$$
$$C = 2\,(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2,$$
$$D = 2\,(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2,$$
$$E = 2\,(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2,$$
$$P = 2A(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2.$$

Donc $\Delta = 0$, ou Δ est divisible par $\alpha - \beta$ et de plus par $(\alpha - \beta)^2$, car cette différence n'entre dans Δ que par ses puissances *paires*. Comme d'ailleurs les carrés des dix différences sont symétriques dans Δ, cette fonction est divisible par chacun de ces carrés.

Cela posé, si deux quelconques des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont égales, l'identité (1) aura lieu puisque alors Δ et Π sont nuls, et il reste à prouver qu'elle subsiste quand ces quantités sont toutes *différentes*.

En effet, on a

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2 \Delta_1, \tag{2}$$

Δ_1 étant une nouvelle fonction des mêmes différences, n'y figurant que par leurs puissances paires.

Si dans (2) on fait $\beta = \gamma$ on aura

$$0 = (\alpha - \gamma)\Delta_1,$$

ou $\Delta'_1 = 0$, car $\alpha \neq \gamma$. Donc Δ_1 est divisible par $\beta - \gamma$, et par suite par $(\beta - \gamma)^2$, ou

$$\Delta_1 = (\beta - \gamma)^2 \Delta_2,$$

et, en remplaçant dans (2),

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 \Delta_2. \tag{3}$$

En continuant de même, on trouvera finalement

$$\Delta = \Pi \times \lambda,$$

λ étant numérique, car Δ et Π sont du même degré. Le nombre λ s'obtiendra d'ailleurs en faisant, par exemple, $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, ce qui donne $\lambda = 24$, et l'identité (1) est justifiée.

Remarque. — Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont les racines de l'équation

$$ax^5 - 5bx^4 + 10cx^3 - 10dx^2 + 5ex - f = 0,$$

chacune des conditions $\Delta = 0$, $\Pi = 0$ exprime que cette équation a une racine double. Il est probable que la première, $\Delta = 0$, est une forme déguisée de celle que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales* (question 1782).

Question 1780.

(1897, p. 388)

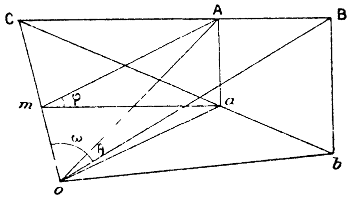
On projette orthogonalement un parallélogramme suivant un carré. Trouver la diagonale du carré en fonction des côtés du parallélogramme et de l'angle compris.

(W.-J. GREENSTREET.)

SOLUTION

Par M. DULIMBERT.

Soient $OA = a$, $OB = b$ les deux côtés du parallélogramme, θ l'angle compris AOB. Je fais passer le plan de projection



par le sommet O. Soient $Aa = \alpha$, $Bb = \beta$ les projetantes des sommets A et B.

Soit $x = Oa = Ob$ le côté du carré; la diagonale cherchée est $x\sqrt{2}$.

La figure donne immédiatement

$$a^2 = x^2 + \alpha^2,$$
$$b^2 = x^2 + \beta^2,$$
$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = \overline{ab}^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2x^2 + (\alpha - \beta)^2.$$

Entre ces trois équations, j'élimine α et β. Il vient

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = 2x^2 + a^2 - x^2 + b^2 - x^2 - 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}$$

ou

$$a^2 b^2 \cos^2\theta = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$$

et en ordonnant

$$x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2 b^2 \sin^2\theta = 0.$$

On voit par substitution que l'équation en x^2 a deux racines positives, l'une inférieure à la plus petite des deux quantités a^2 et b^2, l'autre supérieure à la plus grande. La première convient seule à la question. Le double de cette racine, égal au carré de la diagonale cherchée, a pour expression

$$a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}.$$

La diagonale a donc pour valeur

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}$$

ou

$$\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin\theta} - \sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\theta}.$$

On déduit de là la valeur de l'angle φ que fait le plan du parallélogramme avec le plan de projection. En effet, la surface du parallélogramme est

$$ab\sin\theta;$$

celle du carré est

$$\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}{2}.$$

Donc, on a

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}{2ab\sin\theta}.$$

Il est facile de vérifier que cette valeur est toujours inférieure à 1.

Question 1781.

(1897, p. 388 et 436.)

Enoncé rectifié. — *Soient donnes trois nombres positifs x, y, z, tels que $x + y + z = 1$. On a les inégalités*

$$x^2 + y^2 + z^2 > \frac{5}{16},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 48\,xyz.$$

(Jorge F. d'Avillez.)

SOLUTION

Par Un abonné.

1° $$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}[(x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$
$$=\frac{1}{3}[1+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqq\frac{1}{3}>\frac{5}{16};$$

2° $$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
$$=9+\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-x)^2}{zx}\geqq 9;$$

$xyz\leqq\frac{1}{27}$, le maximum de xyz correspondant à $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Donc $$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{xyz}\geqq 243>48.$$

Plus généralement, si la somme des nombres positifs x_1, x_2, ..., x_n est k,

$$\sum x_i^2\geqq\frac{k^2}{n},\qquad \sum\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{k},\qquad x_1x_2\ldots x_n\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^n,$$
$$\sum\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^{n+2}}{k^{n+1}}x_1x_2\ldots x_n.$$