GROSSETÊTE

Agrégation des sciences mathématiques ; concours de 1896. Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 130-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__130_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS DE 1896. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Laon.

On considère une sphère variable Σ *orthogonale à une sphère fixe* S *et tangente à une autre sphère fixe* S_1.

1° *Lorsque la sphère* Σ *est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan* P, *le lieu du point de contact de* Σ *et de* S_1 *est un cercle.*

Démontrer que, si le plan P *est tangent à la sphère* S, *le lieu du centre de la sphère* Σ *est une section conique ayant pour foyer le point de contact de* S *et de* P.

Examiner le cas où le plan P *est tangent à la sphère* S *en un point du cercle d'intersection de* S *et de* S_1.

2° *On peut déterminer sur la ligne des centres de* S *et de* S_1 *un point* f *tel que la sphère* Σ_0, *concentrique à* Σ *et passant par* f, *reste toujours, quand* Σ *varie, tangente à une sphère fixe* D *ayant pour centre le point* f_1 *centre de* S_1.

3° *Soient* m *le centre de* Σ_0 *et* m' *le point de contact de* Σ_0 *et de* D. *Lorsque le point* m' *décrit un cercle de* D, *le point* m *reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

Discuter en supposant que le plan du cercle considéré sur D *se déplace parallèlement à lui-même.*

4° *Soit* T *le plan perpendiculaire au milieu du seg-*

ment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère D; *lorsque le plan* T *passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.*

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. *Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.*

5° *Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.*

1° Toutes les sphères Σ dont les centres sont situés dans un plan P sont orthogonales à ce plan; par hypothèse, elles sont orthogonales à S; donc elles passeront constamment par deux points fixes A et B situés sur la perpendiculaire abaissée du centre O de S sur le plan P. Ces points A et B sont les points limites du faisceau de sphères déterminé par le plan P et la sphère S.

Si le plan P ne coupe pas S, le faisceau de ces sphères est du premier genre, les points limites A et B sont réels et symétriques par rapport au plan P (*fig.* 1).

Si le plan P coupe S, le faisceau est du second genre, les points limites A et B ne sont pas réels.

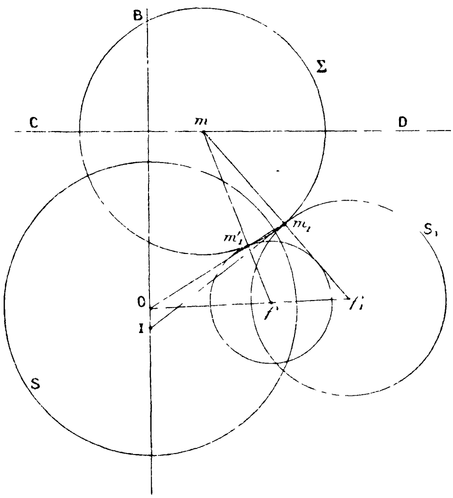
Dans l'un ou l'autre de ces cas, si l'on coupe la sphère S_1 par une sphère quelconque Σ' du faisceau conjugué, le plan radical de cette sphère auxiliaire et de S_1 rencontre le diamètre de S perpendiculaire au plan P en un point I, tel que $IA \times IB$ égale la puissance de I par rapport à la sphère S_1. Or, les points de contact des sphères Σ et de S_1 sont les points de contact des plans tangents menés de I à la sphère S_1; donc le lieu des points de contact de la sphère S_1 et des sphères Σ considérées est le cercle de S_1, qui est situé dans le plan polaire de I par rapport à S_1.

Dans le cas particulier où P est tangent à S, les points A et B sont confondus avec le point de contact A; et si p désigne l'un des points de contact d'une des sphères Σ et de S_1 on aura

$$AI \times IA = \overline{Ip}^2 \qquad \text{d'où} \qquad IA = Ip;$$

par suite, la sphère S′, décrite de I comme centre avec un rayon égal à IA, passe par tous les points tels que p.

Fig. 1.



Cette sphère S′ est, de plus, orthogonale à la sphère S_1 et, par suite, elle est inscrite dans le cône droit qui a son sommet en f_1, centre de S_1, et qui a pour base le cercle lieu des contacts des sphères Σ et S_1. D'ailleurs, les centres des sphères Σ sont sur les génératrices de ce cône droit et dans le plan P, par suite, à l'intersection du cône droit et du plan P tangent en H à la sphère S′ inscrite dans ce cône. D'après le théorème de Dandelin, cette section conique a pour foyer le point A; c'est cette section qui est, dans le plan P, le lieu des centres des sphères Σ.

Si le plan P est tangent à la sphère S en un point du cercle d'intersection de S et de S_1, le lieu du point de contact est un point, le lieu du centre, dans le plan tangent à S, des sphères Σ se réduit à un point, en général, et si S_1 est orthogonale à S, le lieu du centre est la droite Af_1, f_1 étant le centre de S_1.

2° On peut déterminer sur la ligne des centres de S et de S_1 un point f tel que la sphère Σ_0, concentrique à Σ et passant par f, reste toujours, quand Σ varie tangente à une sphère fixe D ayant pour centre le point f_1 centre de S_1 (*fig.* 1).

En effet, les sphères Σ étant tangentes à S_1 et orthogonales à S sont aussi tangentes à une seconde sphère S'_1 inverse de S_1 par rapport au centre O de S, la puissance d'inversion étant le carré du rayon de S. Soit f le centre de S'_1. Lorsque le centre O est extérieur à S_1, les sphères Σ sont tangentes de la même manière à S_1 et à S'_1 et alors la différence entre les distances du centre m de Σ à f et à f_1 est constante et égale à la différence du rayon des sphères inverses S_1 et S'_1. Lorsque O est sur S_1 le point f est à l'infini sur Of_1. Lorsque O est à l'intérieur de S_1 les sphères S_1 et S'_1 sont tangentes à Σ, l'une intérieurement, l'autre extérieurement, et alors la somme $mf + mf_1$ est constante et égale à la somme des rayons des sphères S_1 et S'_1 inverses l'une de l'autre. Donc, dans l'espace, le lieu du point m, centre des sphères Σ, est une quadrique de révolution ayant pour foyers les points f et f_1, l'un d'eux f pouvant être à l'infini. L'un des axes de cette quadrique est la droite Of_1. Par suite, si de m comme centre, avec un rayon égal à mf, on décrit une sphère Σ_0, cette sphère sera tangente à la sphère directrice D relative à l'autre foyer.

3° m désignant le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de D, m' décrivant un cercle de D, m reste sur la quadrique de révolution et puisque les points m, m', f_1 sont alignés, m est aussi sur le cône droit de sommet f_1 qui a pour base le cercle considéré sur D. Or, l'intersection d'une des nappes d'un cône de révolution, qui a son sommet à l'un des foyers d'une quadrique de révolution avec cette quadrique, est une courbe plane. Donc le point m décrit une courbe plane quand m' décrit un cercle D. Cette courbe pourra être une ellipse, une hyperbole ou une parabole, puisqu'elle est la section plane γ d'un cône de révolution.

Si le plan du cercle considéré sur D se déplace parallèlement à lui-même, l'axe du cône de révolution est invariable et, puisque, d'après un théorème connu, le pôle du plan de la section γ, par rapport à la quadrique, est sur cet axe, il arrive que le plan de la section tourne autour de la *droite conjuguée* de celle qui est l'axe commun des cônes droits considérés. Cette droite est perpendiculaire au plan de ff_1 et de la perpendiculaire abaissée de f_1 sur le plan de l'un des cercles considérés. Soit P′ ce plan. En prenant la section de la quadrique par ce plan P′, la droite conjuguée de l'axe commun des cônes passe par le pôle de cet axe par rapport à la section méridienne du plan P′. La discussion et l'étude de la section se font facilement en faisant tourner dans le plan méridien une droite autour du pôle, par rapport à la section méridienne, de l'axe commun des cônes.

4° Le plan T perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' de la sphère D est tangent à la quadrique, le point de contact est sur f_1m'. Lorsque ce plan tangent tourne autour d'un point fixe q, il enveloppe le cône de sommet q, circonscrit à la quadrique. La courbe de contact est l'intersection de la quadrique et du plan polaire de q par rapport à cette quadrique. Cette courbe étant plane, le cône de sommet f_1 qui l'aura pour base sera de révolution, son axe étant $f_1 q$. Or les génératrices de ce cône sont les droites fm'. Donc le lieu du point m' sur la sphère D sera l'intersection du cône droit de sommet f_1 et de la sphère D : ce sera un cercle que nous appellerons γ_q.

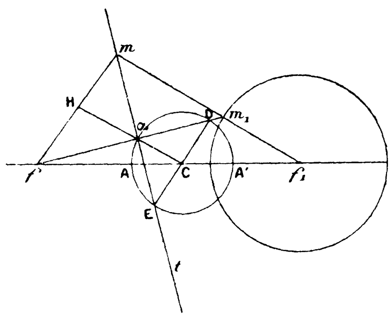
Si le point q se déplace dans un plan fixe, la sphère de rayon qf, qui coupe S_1 précisément suivant le cercle γ_q, se déplace en passant constamment par deux points fixes f et φ, φ étant le symétrique de f par rapport au plan dans lequel se meut q. Toutes les sphères de centre q qui passent par f et φ sont telles que si on les accouple avec S_1 il existe sur $f\varphi$ un point μ dont la puissance par rapport à S_1 est égale à $\mu f \times \mu\varphi$; par suite, le point μ, qui est d'égale puissance par rapport à S_1 et par rapport à l'une quelconque des sphères du faisceau considéré, est situé dans le plan radical de l'une de ces sphères et de S_1. Or le cercle γ_q est dans ce plan radical; donc les plans des cercles γ_q passent constamment par le point fixe μ. Il en résulte que les cercles γ_q sont orthogonaux à un cercle fixe de D qui n'est autre que l'intersection de S_1 et du plan polaire du point μ par rapport à cette sphère S_1.

Dans le cas où le point q décrit une droite fixe, il peut être considéré comme se déplaçant simultanément dans deux plans quelconques passant par cette droite. Par suite les cercles γ_q ont leurs plans passant par la droite $\mu\mu'$ des points fixes correspondant aux plans envisagés; par suite, ces cercles sont orthogonaux à deux cercles de S_1 et jouissent de propriétés connues.

5° Soit c le milieu de ff_1 (*fig.* 2), les droites cm et

fm' se coupent en un point M qui demeure dans un plan fixe quand on fait varier Σ_0. En effet, prenons pour plan de figure une section méridienne de la quadrique de

Fig. 2.



révolution. Figurons le cercle directeur de centre f_1; soient f le point fixe de Of_1, c le milieu de ff_1, m un point de la conique méridienne correspondant au point m' du cercle directeur, α la projection du foyer f sur la tangente mt, et D et E les points de rencontre du cercle principal avec fm' et mt. Nous remarquerons d'abord que fm est parallèle à DE, car les angles $CD\alpha$, $C\alpha D$, $H\alpha f$ sont égaux; de plus, $C\alpha$ étant parallèle à fm' et le triangle fmm' étant isoscèle, il en est de même de $f\alpha H$, H étant le point d'intersection de $C\alpha$ et de fm; les angles $Hf\alpha$ et αDC sont égaux, par suite CD et fM sont parallèles. Cela posé, le faisceau $C(DM\alpha f)$ est harmonique, puisque mf parallèle au rayon CD est divisé par le rayon $C\alpha$ en deux parties égales; f et M sont donc conjugués harmoniques par rapport à αD. Donc la polaire de f par rapport au cercle principal passe par M. Il en résulte que, dans le plan de la figure, le lieu de M est la directrice relative au foyer f; et, dans l'espace, le lieu de M est le plan directeur de la quadrique relatif au foyer f.