Nouvelles annales de mathématiques

Maurice d'Ocagne

Sur la détermination des courbes par une équation entre les distances tangentielles de leurs points à des courbes données

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 115-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__115_1>

[O2q]

SUR LA DÉTERMINATION DES COURBES PAR UNE ÉQUATION ENTRE LES DISTANCES TANGENTIELLES DE LEURS POINTS A DES COURBES DONNÉES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Si $M_1A = l_1$, $M_2A = l_2$, ..., $M_nA = l_n$ sont les distances tangentielles du point A aux courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n), l'équation

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = 0$$

définit une courbe (A).

Pour que les points de cette courbe soient déterminés sans ambiguïté, il faut que le signe des distances $l_1, l_2, \ldots, l_n$ soit défini avec précision.

Rappelons la convention que nous avons adoptée dans notre *Cours de Géométrie infinitésimale*. Prenant pour sens positif d'une courbe en un point le sens direct (trigonométrique positif) de son cercle osculateur en ce point, nous étendons ce sens positif à toute la tangente; dès lors le sens positif de la normale est celui qui va du point considéré sur la courbe vers le centre de courbure correspondant [1] (*loc. cit.*, p. 261).

On peut donc dire que la distance l_i sera prise positivement ou négativement suivant que le segment M_iA de la tangente, considéré comme une force appliquée en M_i, tendra à faire tourner le rayon de courbure $M_i\mu_i$ autour du centre de courbure μ_i dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

La détermination de la normale en A à la courbe (A) résulte du théorème suivant, donné dans notre *Cours* (p. 271) :

Si, sur la tangente AM_i, *on porte le segment* $AL_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$ *et si la perpendiculaire élevée à cette tangente en* L_i *coupe au point* λ_i *la droite qui joint le point* A *au centre de courbure* μ_i *répondant au point* M_i, *la normale en* A *à la courbe* (A) *est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs* $A\lambda_i$.

Il suffit d'ajouter que chaque segment AL_i doit être porté sur la tangente correspondante (dont le sens positif a été ci-dessus défini) *en tenant compte de son signe.*

Si la courbe (M_i) est un cercle, on peut, du point A, lui mener deux tangentes AM_i et AM'_i, et si l_i et l'_i sont les longueurs de ces tangentes prises avec leurs signes, on a

$$l_i + l'_i = 0.$$

---

(1) Si la courbe se réduit à un point, on peut choisir indifféremment le sens positif sur une droite passant par ce point, mais une fois ce choix fait, le sens positif de la direction normale est parfaitement défini; c'est celui que l'on obtient en faisant tourner de 90°, dans le sens direct, la partie positive de la première droite.

Si donc on a, pour chaque point de la courbe (A),

$$F(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n) = 0,$$

on a aussi

$$F(l_1, \ldots, -l'_i, \ldots, l_n) = 0.$$

La normale obtenue en partant de l'une ou de l'autre équation doit donc être la même, c'est-à-dire que le vecteur $A\lambda_i$ doit être le même dans les deux cas.

Or, on a évidemment

$$\frac{\partial F}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial l'_i} = 0.$$

En d'autres termes, les segments AL_i et AL'_i sont égaux et de signes contraires, de même que les segments AM_i et AM'_i, et comme la droite $A\mu_i$ est la bissectrice de l'angle $M_iAM'_i$ on voit immédiatement que le point λi est le même dans les deux cas.

Remarque. — On peut changer *à la fois* le sens de tous les segments $A\lambda_i$. La direction de leur résultante reste la même. Donc, au lieu de porter à partir de A sur chaque segment M_iA le segment $AL_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$, on peut porter le segment $AL_i = -\frac{\partial F}{\partial l_i}$.

Exemple. — Supposons que l'équation donnée soit $\Sigma l_i^2 = k^2$. Dès lors $\frac{\partial F}{\partial l_i} = l_i$. Nous pouvons donc prendre $AL_i = -l_i$, ce qui, *quel que soit le signe de* M_iA, fait coïncider L_i avec M_i et, par suite, λ_i avec μ_i. Donc, dans ce cas, la normale est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs $A\mu_i$; en d'autres termes, *elle passe par le centre de gravité des centres de courbure* μ_i. On retrouve ainsi un cas particulier d'un théorème de M. J. Pomey (*Nouvelles Annales*, 1889, p. 527), que, dans le cas général, nous avons déjà rattaché à notre théorème (*Nouvelles Annales*, 1890; p. 291).