NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur une question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 8-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__8_1>

[E5]

SUR UNE QUESTION DE LICENCE (1);

PAR M. V. JAMET.

Étude de l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2} dz$$

(1) Énoncé dans le numéro de mars 1896, p. 137.

prise le long du contour formé de deux demi-circonférences de rayons R *et* r, *ayant l'origine pour centre commun et reliées par les portions de l'axe réel qu'elles interceptent entre elles.*

On supposera a *et* b *réels et positifs.*

En faisant tendre R *vers l'infini et* r *vers zéro, on déduira la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x^2}\, dx$$

(α *et* β *réels*). (Rennes, session de novembre 1895.)

1. Évidemment, on doit supposer les deux demi-circonférences tracées de part et d'autre de l'axe réel; sans quoi le contour d'intégration ne renfermerait aucun point critique de la fonction sous le signe $\int$, et l'intégrale proposée serait constamment nulle.

2. Dans le cas contraire, l'intégrale aura la même valeur que si elle était calculée tout le long d'un cercle ayant pour centre l'origine. Mais alors on voit qu'elle est égale à la valeur que prend, pour $\alpha = 0$, la dérivée, par rapport à α, de l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z - \alpha}\, dz,$$

calculée tout le long d'un cercle ayant α pour centre. Or cette dernière fonction est égale à

$$2\pi\sqrt{-1}\,(e^{2ai\alpha} - e^{2bi\alpha});$$

sa dérivée, par rapport à α, est

$$-4\pi(ae^{2ai\alpha} - be^{2bi\alpha}).$$

Pour $\alpha = 0$, elle devient

$$4\pi(b-a).$$

Telle est donc la valeur de l'intégrale proposée.

3. Considérons maintenant le cas où la demi-circonférence de rayon R est tracée du côté des y positifs; je dis que si R croît au delà de toute limite, la partie de l'intégrale proposée qui se rapporte à cette circonférence tend vers zéro. En effet, si l'on pose

$$z = x + yi = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

l'intégrale

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{e^{2aiz}}{z^2}\,dz,$$

calculée tout le long de cette demi-circonférence, est égale à

$$\frac{i}{R}\int_0^\pi e^{2ai(x+yi)-\theta i}\,d\theta.$$

(On suppose la demi-circonférence parcourue dans le sens positif.)

La somme des modules de ses éléments est

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{R}\int_0^\pi e^{-2ay}\,d\theta,$$

et, comme a et y sont positifs, le facteur e^{-2ay} ne dépasse jamais l'unité. Donc l'expression (B) est inférieure à

$$\frac{\pi}{R}$$

et $\frac{\pi}{R}$ est, *a fortiori*, supérieure au module de l'intégrale (A). De même l'intégrale

$$\int \frac{e^{2biz}}{z^2}\,dz.$$

calculée tout le long de la même demi-circonférence, a un module inférieur à $\frac{\pi}{R}$, et enfin, l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2} dz,$$

calculée tout le long du même contour, a un module inférieur à $\frac{2\pi}{R}$. C. Q. F. D.

4. Je suppose maintenant la demi-circonférence de rayon r parcourue dans le sens négatif et je me propose de calculer la limite vers laquelle tend l'intégrale proposée, calculée tout le long de cette demi-circonférence, quand r tend vers zéro. A cet effet, j'observe que la fonction sous le signe $\int$ est égale à

$$2i\frac{a-b}{z} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(2i)^{p+2}(a^{p+2} - b^{p+2})}{1.2.3\ldots\overline{p+2}} z^p.$$

La série écrite sous le signe $\sum$ est uniformément convergente, quand le module de z varie de o à un nombre ρ, qu'on peut supposer supérieur à r. De plus, si dans le terme général on remplace z par $re^{\theta i}$, et qu'on intègre terme à terme, en faisant varier θ de π à 2π, on trouve une série convergente, car son terme général est

$$i\frac{(2i)^{p+2}(a^{p+2} - b^{p+2})}{1.2.3\ldots\overline{p+2}} r^{p+1} \int_{\pi}^{2\pi} e^{(p+1)\theta i} d\theta,$$

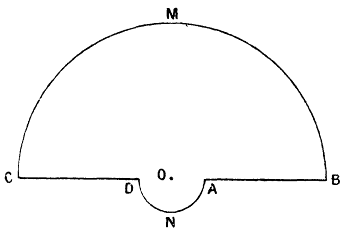
et le module de ce terme est inférieur au terme général d'une série convergente, savoir

$$\pi\frac{2^{p+2}(a^{p+2} - b^{p+2})}{1.2.3\ldots\overline{p+2}} r^{p+1}.$$

Donc la série écrite sous le signe $\sum$ donne lieu à une intégrale égale à la somme d'une série convergente, s'annulant avec r. Seul, le terme en dehors du signe $\sum$ donne lieu à une intégrale différente de zéro, savoir

$$-2\int_{\pi}^{2\pi}(a-b)\,d\theta = 2\pi(b-a).$$

5. Il en résulte que l'intégrale proposée, calculée le long des deux segments CD, AB, qui relient entre elles



les deux demi-circonférences données, tend vers une limite égale à l'excès de l'intégrale totale $4\pi(b-a)$. Donc, en faisant varier x par des valeurs réelles, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}\,dx = 2\pi(b-a)$$

et par conséquent

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx = 2\pi(b-a),$$

$$(D)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2ax-\sin 2bx}{x^2}\,dx = 0.$$

Or la formule (c) se transforme comme il suit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\overline{(b-a)}x\,\sin\overline{(b+a)}x}{x^2}\,dx = \pi(b-a).$$

Si l'on suppose $b > a$, on pourra conclure que α et β

étant positifs l'un et l'autre, *mais* α *étant* $< \beta$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x^2} = \pi\alpha.$$

Si b est inférieur à a, on pourra conclure encore que, si α est négatif et β positif

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x^2}\,dx = \pi\alpha.$$

Si α et β sont négatifs, on posera $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$, et l'on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha' x \sin\beta' x}{x^2}\,dx = \pi\alpha' = -\pi\alpha,$$

α' étant supposé $< \beta'$.

6. La formule (D) donne lieu à des considérations du même ordre. Elle se transforme comme il suit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\overline{a-b})x \cos(\overline{a+b})x}{x^2}\,dx = 0.$$

D'ailleurs, dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \cos\beta x}{x^2}\,dx.$$

on peut toujours regarder β comme positif, et l'on en conclut que cette intégrale est nulle pour tout système de valeurs réelles de α et de β.