Nouvelles annales de mathématiques

Licence ès sciences mathématiques. Session de novembre 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 80-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__80_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Paris.

ANALYSE. — I. *Une surface* S *étant rapportée à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un*

(1) *Voir* octobre 1896, p. 475.

point de S, MT *la tangente en* M *à la section de* S *par le plan* zOM, T *le point où* MT *rencontre* Oz. *Soient, de plus,* m *la projection de* M *sur* Oz *et* P *la projection de* M *sur le plan* xOz.

Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles que vérifient toutes les surfaces pour lesquelles le produit Mm $\times$ OT *des segments* Mm *et* OT *est égal (en tout point* M) *à* $\overline{\mathrm{OP}}^2$.

(*On pourra prendre comme fonction le* z *du point* M, *et, comme variables indépendantes, les coordonnées polaires* r *et* θ *de la projection du point* M *sur le plan* xOy).

L'équation demandée est

$$\frac{z}{r} - \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z^2}{r^2} + \cos^2\theta,$$

équation homogène qu'on sait intégrer. On trouve

$$z = r\cos\theta\,\mathrm{tang}\left[\cos\theta\log\frac{F(\theta)}{r}\right],$$

en désignant par F(θ) une fonction arbitraire.

II. *Soit* z *une variable complexe et soit* J(z) *l'intégrale*

$$J(z) = \int_4^z \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3}{z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz + C.$$

Posons

$$\varphi(z) = e^{J(z)}, \qquad F(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\varphi(z)}.$$

1° *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier* C *et les coefficients* α, β, γ, δ, *pour que la fonction* F(z) *soit uniforme dans tout le plan?*

2° *Quelles conditions faut-il ajouter pour que* F(*z*) *se réduise à une fonction rationnelle de z?*

MÉCANIQUE. — I. *Un disque circulaire* A, *de rayon* R, *est fixé dans un plan vertical. Un deuxième disque circulaire* B, *homogène et pesant, de même rayon* R, *est mobile dans le même plan vertical et assujetti à rester en contact avec le disque* A, *sur lequel il peut glisser sans frottement.*

Le disque B *est abandonné sans vitesse initiale, dans une position telle que la droite* AB, *joignant les centres des disques, fasse, avec la verticale ascendante, un angle de* 45°.

Trouver le mouvement du disque B; *former l'équation déterminant l'angle que fait la droite* AB *avec la verticale ascendante au moment où le disque* B *quitte le disque* A.

II. *Un segment de droite* AB, *mobile dans un plan* π, *est assujetti aux conditions suivantes : il glisse sur un point fixe* O *du plan* π, *et il est vu sous un angle droit d'un autre point* C *de ce plan.*

Trouver le centre instantané de rotation et les courbes décrites par ce point dans le plan π, *d'une part, et, d'autre part, dans un plan lié invariablement au segment* AB. *On supposera la longueur du segment* AB *double de la distance* OC.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a observé à* $6^h 13^m 11^s,3$ (*temps sidéral*) *le passage au premier méridien d'une étoile dont les coordonnées sont*

Ascension droite.............	$7^h 58^m 17^s,6$
Distance polaire.............	$44° 9' 53''$

On demande de déterminer : 1° *la latitude du lieu* *d'observation ; 2° l'erreur que produirait sur cette latitude une erreur d'une seconde sur l'instant du passage ; 3° l'erreur qui résulterait d'une erreur d'une seconde d'arc sur l'azimut du premier vertical.*

Besançon.

ANALYSE. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient deux points* A *et* B, *dont les coordonnées sont respectivement*

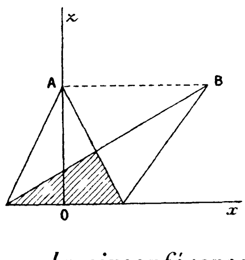
$$\begin{array}{llll} A\ldots & x = 0, & y = 0, & z = h, \\ B\ldots & x = b, & y = 0, & z = h, \end{array}$$

et une circonférence C *représentée par les équations*

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = 0;$$

a, b, h *sont des quantités positives données.*

On considère les deux surfaces coniques qui ont



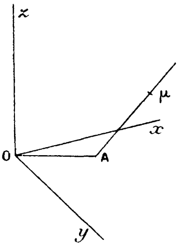
pour base commune la circonférence C *et pour sommets respectifs les points* A *et* B.

On demande de calculer le volume limité par ces deux surfaces coniques et par le plan des xy.

Dans le croquis, les points de ce volume se projettent sur le plan xOz, *suivant la partie indiquée par des hachures.*

On remarque que les deux cônes se coupent suivant une seconde courbe plane. On peut évaluer le volume demandé en le partageant en tranches infiniment minces, soit par des plans parallèles au plan des xy, soit par des plans passant par la ligne des sommets. Dans ce dernier cas, chaque tranche pourra être assimilée, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à un tronc de prisme triangulaire, et l'on est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle.

Mécanique. — *Un tube rectiligne peut tourner autour d'une verticale* Oz. *Dans ce tube est mobile sans*



frottement une bille pesante. Le tube fait avec Oz *un angle* α, *et sa distance à cet axe est* a; m *est la masse du tube,* μ *celle de la bille.*

Déterminer en fonction du temps la distance $\mu A = q$ *et l'angle* $AOx = \theta$. (*On suppose que* OA *est la perpendiculaire commune au tube et à l'axe.*)

Examiner les divers cas particuliers que présente la question pour des valeurs particulières de a *et de* α.

Emploi du principe des forces vives et du théorème du moment des quantités de mouvement autour de Oz.

Astronomie. — *Calculer la distance angulaire géocentrique de* α *de l'Aigle au centre de la Lune, le* 19 *août* 1885, *à* 6^h, *temps moyen de Paris.*

On prendra pour données les ascensions droites et les déclinaisons des deux astres.

Caen.

ANALYSE et GÉOMÉTRIE. — I. *Si, considérant u comme une fonction de x, on calcule suivant la règle connue la dérivée seconde de la fonction composée $f(x, u)$, on tombe sur une expression renfermant à la fois les quatre quantités x, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$.*

Cela fait, et considérant désormais x, u, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ comme quatre variables indépendantes distinctes, on déterminera la fonction $f(x, u)$ par la condition que l'expression dont il s'agit soit le produit d'une fonction F *des seules variables x et u par la quantité*

$$\alpha + 2\beta\frac{du}{dx} + \gamma\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2u}{dx^2},$$

où α, β, γ désignent trois constantes données. Relation qui doit exister entre α, β et γ pour que le problème soit possible.

II. *En désignant par* C *une courbe plane donnée, on propose de rechercher les surfaces réglées satisfaisant à la double condition :* 1° *que toute génératrice rencontre la courbe* C *à angle droit;* 2° *que* C *soit une ligne de courbure de la surface cherchée.*

I. La fonction f doit visiblement satisfaire aux conditions

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}}{\beta} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{1},$$

$\frac{\partial f}{\partial u}$ étant précisément F. Intégrant l'équation qui résulte de l'égalité des deux dernières fractions, on a, si $\gamma \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = e^{\gamma u}\varphi(x), \qquad f = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma u}\varphi(x) + \psi(x);$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}$ est égal à $e^{\gamma u}\varphi'(x)$; pour qu'il soit aussi égal à $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, il faut que $\varphi(x)$ soit de la forme $A e^{\beta x}$.

L'égalité de la première et de la quatrième fractions donne alors l'équation

$$\frac{A\beta^2}{\gamma} e^{\beta x + \gamma u} + \psi''(x) = \alpha A e^{\beta x + \gamma u};$$

elle exige que β^2 soit égal à $\alpha\gamma$ et donne ensuite

$$\psi''(x) = 0, \qquad \psi(x) = Bx + C,$$
$$f(x, u) = A e^{\beta x + \gamma u} + Bx + C.$$

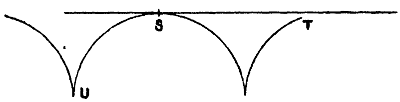
Si γ est nul, on trouve d'abord que $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ est de la forme $\varphi(x)$, puisque β doit être nul et f de la forme

$$f(x, u) = A\left(u + \tfrac{1}{2}\alpha x^2\right) + Bx + C.$$

II. D'après le théorème de Joachimsthal, le plan tangent à la surface cherchée S aux divers points de C fait un angle constant avec le plan P de cette courbe; or, cet angle est mesuré par l'angle des génératrices avec leurs projections sur P; si P était horizontal, S serait une surface à pente constante et développable; les lignes de courbure étant les génératrices et les lignes de niveau.

On trouvera beaucoup de formes pour la solution analytique.

Mécanique. — I. *Dans un plan fixe* P, *on donne une cycloïde* U *et la droite* ST *qui la touche en l'un de ses sommets* S. *Un triangle* ABC *glisse sur le plan* P *de manière que le sommet* A *reste sur la droite* ST *et que le côté* AB *soit constamment tangent à* U, *le point de contact se déplaçant sur la cycloïde avec une vitesse*



constante. Lieux du centre instantané de rotation dans le plan P *et dans le plan du triangle. Pour une position donnée de ce triangle, déterminer le centre de courbure de la trajectoire du point* C *et le centre des accélérations du plan mobile.*

II. *Sur un cône dont toutes les génératrices font avec la verticale un angle de* 45°, *déterminer une courbe* C *telle que, si un point pesant glisse sur cette courbe sans frottement, il exercera sur elle une pression constamment horizontale; la courbe* C, *qui est fixe, a sa tangente horizontale en un point situé à la hauteur* h *au-dessus du sommet du cône et le mobile considéré y est animé d'une vitesse égale à* $\sqrt{2gh}$. *Loi du mouvement; direction et grandeur de la pression exercée sur* C *par le point pesant dans une position quelconque.*

I. Soit, dans une position quelconque du triangle, M le point où AB touche U : on voit sans peine que le centre instantané est au point le plus bas du cercle générateur passant par M ; son lieu dans le plan P est la base de la cycloïde; dans le plan mobile, c'est un cercle de centre A et de rayon $2a$, a étant le rayon du cercle générateur.

Le centre de courbure de la trajectoire de C s'obtient par la construction de Savary.

Les coordonnées du centre des accélérations K sont données par des équations de forme connue

$$\omega^2\xi + \omega'\eta = 0, \qquad \omega'\xi - \omega^2\eta - \omega\sigma' = 0.$$

On voit que σ' est égal à $-2a\omega$. D'ailleurs, dans le plan P, arc SM est de la forme $4a\sin\alpha$ (α angle de AB avec ST); on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega$$

et

$$4a\sin\alpha = ct, \qquad -4a\omega\cos\alpha = c,$$
$$-4a\omega^2\sin\alpha - 4a\omega'\cos\alpha = 0.$$

On a donc

$$\omega' = -\omega^2\operatorname{tang}\alpha,$$

et les coordonnées de K sont

$$\xi = a\sin 2\alpha, \qquad \eta = a(1 + \cos 2\alpha);$$

le point K se confond avec M.

II. Masse du mobile 1; P, pression sur C, fait avec les axes les angles α, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -P\cos\alpha,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -P\sin\alpha,$$

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g,$$

les axes étant choisis convenablement. La pression étant perpendiculaire à la vitesse,

$$(4) \qquad \cos\alpha\frac{dx}{dt} + \sin\alpha\frac{dy}{dt} = 0,$$

d'où, en combinant (1) et (2),

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2gh.$$

(3) donne

$$\frac{dz^2}{dt^2} = 2g(h - z);$$

éliminant dt^2,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dz^2} = \frac{h}{h - z}.$$

En coordonnées cylindriques u, ψ et z, comme ici $z = u$,

$$\frac{du^2 + u^2 d\psi^2}{du^2} = \frac{h}{h - u},$$

$$d\psi = -\frac{du}{\sqrt{hu - u^2}}, \qquad u = \frac{h}{2}\left(1 + \cos\psi\right);$$

C se projette suivant une cardioïde.

(3) donne aussi

$$u = z = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Maintenant $x = u \cos\psi$ donne

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{2}(-\sin\psi - \sin^2\psi)\frac{d\psi}{dt};$$

de même, $y = u \sin\psi$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{h}{2}(\cos\psi + \cos^2\psi)\frac{d\psi}{dt};$$

et (4) devient, en divisant par $\frac{h}{2} \cos\frac{\psi}{2} \frac{d\psi}{dt}$,

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\psi}{2}\right) = 0, \qquad \alpha = \frac{3\psi}{2};$$

P fait l'angle $\frac{\psi}{2}$ avec la perpendiculaire à OZ.

Enfin, en différentiant l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} - z\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2} = 0;$$

remplaçant $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ par les valeurs (1), (2); $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ et $\frac{dz^2}{dt^2}$ par $2gh$ et $2g(h-z)$,

$$-\mathrm{P}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+gz+2gh-2g(h-z)=0;$$

$$\mathrm{P}u\cos(\alpha-\psi)=3gz,\qquad \mathrm{P}=\frac{3g}{\cos\frac{1}{2}\psi}.$$

P est infini au sommet du cône.

Épreuve pratique. — *En un point de l'équateur, on observe une étoile dont l'ascension droite est* $6^h\,40^m\,26^s,8$ *et la déclinaison* $16^\circ 34' 5'',1$; *l'étoile est à l'est de l'observateur et à* $32^\circ\,12'\,20'',5$ *du zénith. Calculer l'heure sidérale.* (Rép. : $4^h\,48^m\,22^s$.)