NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MANGEOT

Sur l'application de deux covariants à la construction de quelques espèces de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 76-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__76_1>

[M[1]61β]

SUR L'APPLICATION DE DEUX COVARIANTS A LA CONSTRUCTION DE QUELQUES ESPÈCES DE COURBES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès sciences

Je considère une courbe plane F[1] représentée par l'équation entière

$$f(x, y) = 0,$$

relativement à deux axes de coordonnées rectangulaires

(1) Traduit par M. Padé. Paris, Gauthier-Villars et fils.

quelconques Ox, Oy, et soient Φ, Ψ les deux lignes que définissent respectivement, par rapport à ces axes, les équations

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\psi(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0,$$

dont les premiers membres sont des covariants de f pour toute substitution orthogonale.

Si l'on calcule les formes particulières que prennent ces deux covariants lorsqu'on substitue à f le premier membre de l'équation qui représente l'une des courbes suivantes : cissoïde, strophoïde droite, lemniscate, conchoïde de cercle, par rapport aux axes liés à la courbe auxquels on la rapporte habituellement, l'examen de ces formes conduit aux résultats que voici, quand la courbe F est du troisième ou du quatrième ordre.

Pour que la courbe F soit une cissoïde, il faut et il suffit que Ψ soit une hyperbole, et que, en rapportant la courbe aux deux axes de cette conique, son équation prenne la forme

$$y'^2(x'-a)-(x'+a)^3 = 0.$$

Pour que la courbe F soit une strophoïde droite, il faut et il suffit que Ψ soit une hyperbole, que Φ soit une droite déterminée perpendiculaire à son axe transverse D, et que, en rapportant la courbe aux deux droites D et Φ, son équation ait la forme

$$x'(x'^2+y'^2)+a(x'^2-y'^2) = 0.$$

Pour que F soit une lemniscate ou une conchoïde de cercle, il est nécessaire et suffisant que Φ soit un cercle et que, en désignant par x_0, y_0 les coordonnées du centre de cercle, la fonction $f(x+x_0, y+y_0)$ ait la forme

$$(x^2+y^2)^2+A(x^2-y^2)+Bxy,$$

ou celle-ci

$$(x^2+y^2-a^2)^2-b^2[x^2+y^2+2a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+a^2].$$

Dans les quatre cas, on connaîtra la position de la courbe par rapport aux axes Ox, Oy, et sa grandeur. Lorsque l'équation $f(x,y)=0$ représente une cissoïde (ou une strophoïde droite), la distance du point double à l'asymptote a pour expression

$$2.3^{-\frac{1}{4}}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{3}{4}}}\quad\left(\text{ou }\tfrac{1}{2}3^{\frac{3}{4}}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{3}{4}}}\right),$$

en appelant Δ le discriminant de la fonction du second degré $\psi(x,y)$ et δ celui des termes du second degré de cette fonction.

Si $f(x,y)=0$ est l'équation d'une lemniscate, le carré de la distance de son centre à l'un de ses sommets a pour valeur $2\sqrt{\frac{u}{\varphi}-f}$, u désignant la fonction $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$, qui est ici divisible par φ.