NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL STÄCKEL

Le théorème d'addition de la fonction $\wp(u)$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 75-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__75_1>

[F4a]

LE THÉORÈME D'ADDITION DE LA FONCTION $\wp(u)$ (¹);

PAR M. PAUL STÄCKEL,

Professeur à l'Université de Königsberg.

Traduit de l'allemand, avec l'autorisation de l'auteur,
par M. L. LAUGEL.

Lorsque les grandeurs u_1, u_2, u_3 vérifient la condition

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \tag{1}$$

le quotient

$$\frac{\sigma(u+u_1)\sigma(u+u_2)\sigma(u+u_3)}{\sigma^3(u)} = f(u) \tag{2}$$

représente une fonction elliptique du troisième ordre, qui ne devient infinie qu'en les points qui sont congrus à zéro. Par conséquent, si l'on développe $f(u)$ suivant les puissances de u, le coefficient de u^{-1} doit s'évanouir identiquement, et l'on a, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} 0 = {} & \sigma u_1 \sigma u_2 \sigma'' u_3 + \sigma u_2 \sigma u_3 \sigma'' u_1 + \sigma u_3 \sigma u_1 \sigma'' u_2 \\ & + 2\sigma u_1 \sigma' u_2 \sigma' u_3 + 2\sigma u_2 \sigma' u_3 \sigma' u_1 + 2\sigma u_3 \sigma' u_1 \sigma' u_2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XLVII, 4ᵉ Cahier, p. 604; 1896.

ou, après une transformation facile à pratiquer,

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\sigma'' u_1}{\sigma u_1} - \left(\dfrac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right)^2 + \dfrac{\sigma'' u_2}{\sigma u_2} - \left(\dfrac{\sigma' u_2}{\sigma u_2}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{\sigma'' u_3}{\sigma u_3} - \left(\dfrac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \dfrac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \dfrac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2. \end{cases}$$

Or, nous avons les équations [H. A. Schwarz, *Formeln und Lehrsätze*... (¹), Article 9(1), Article 11 (4)] :

$$(5)\qquad \frac{\sigma'' u}{\sigma u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)^2 = -\wp(u),$$

$$(6)\quad \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3} = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}, \quad (u_1 + u_2 + u_3 = 0);$$

par suite, la relation (4) est équivalente à celle-ci :

$$(7)\qquad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\right)^2,$$

qui précisément exprime *le théorème d'addition de la fonction* $\wp(u)$ *sous sa forme classique.*