Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1897. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 550-574

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__550_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

Lille.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

1. *Énoncer et démontrer les propriétés principales des fonctions définies par les égalités suivantes*

$$\sigma(z) = z\,\Pi\left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}},$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \qquad p(z) = -\zeta'(z).$$

On suppose que l'on donne à w toutes les valeurs comprises dans la formule

$$w = 2k\omega + 2k'\omega',$$

ω, ω' *étant deux constantes données dont le rapport est imaginaire, k et k' deux entiers susceptibles de prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives ou nulles sans pouvoir toutefois s'annuler en même temps.*

Montrer comment toute fonction doublement périodique et méromorphe peut s'exprimer à l'aide d'une fonction $\zeta(z)$ et de ses dérivées.

2. *Intégrer l'équation linéaire*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 12x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 60x\frac{dy}{dx} - 120y = 2x^6.$$

N. B. — L'équation algébrique qu'on est conduit à résoudre a ses racines commensurables.

Certificat de Géométrie supérieure.

1. *Donner les différentes définitions des lignes de courbure d'une surface; montrer qu'elles sont équivalentes; établir l'équation différentielle des lignes de courbure : application aux surfaces du second ordre.*

Démontrer les propriétés fondamentales des lignes de courbure en général, leur conservation dans la transformation par inversion, leur rôle dans la théorie des systèmes triples orthogonaux.

2. *Lignes asymptotiques d'une surface de révolution; déterminer le méridien de telle sorte que les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des parallèles suivant des spirales logarithmiques ayant le pied de l'axe pour pôle.*

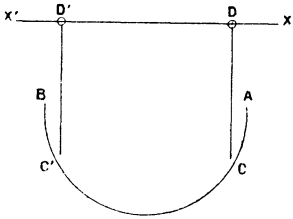
Certificat de Mécanique rationnelle.

1. 1° *Établir les équations de Lagrange pour un point matériel mobile, sans frottement, sur une surface fixe ou mobile.*

2° *En supposant que cette surface soit fixe, et que la force appliquée au mobile dérive d'un potentiel, ramener les équations du mouvement à la forme canonique; puis montrer que, si l'on en connait une intégrale première, distincte de celle des forces vives, leur intégration s'achève à l'aide de quadratures.*

2. *Un tube homogène pesant* AB, *de section négligeable, et ayant la forme d'une demi-circonférence, est suspendu à une tige rectiligne horizontale fixe* xx',

à l'aide de deux tringles CD, C′D′ *terminées par des anneaux très petits* D *et* D′. *Ces tringles, invariablement fixées au tube en* C *et* C′, *sont égales et symé-*



triquement placées, de manière que, dans toutes les positions du tube, le diamètre AB *reste parallèle à* xx'.

Quand le tube AB *est immobile dans sa position d'équilibre stable, on abandonne à elle-même en* A, *sans vitesse initiale, une petite sphère pesante* S, *ayant un diamètre un peu inférieur à celui du tube, de manière qu'elle puisse y pénétrer.*

On demande d'étudier dans ces conditions, et sans tenir compte du frottement, les mouvements de la sphère S *et du tube* AB. *On désignera par m la masse de cette sphère et par m' la masse du solide formé par le tube et les deux tringles.*

Certificat d'Astronomie.

1. *Détermination de la parallaxe du Soleil par les passages de Vénus.*

N. B. — On suppose connues les formules de la parallaxe en longitude et en latitude, savoir

$$\delta l = \frac{r_0 \mathrm{P} \cos\lambda_0}{\cos\lambda}\sin(l - l_0), \qquad \delta\lambda = \frac{r_0 \mathrm{P} \sin\lambda_0}{\sin\varphi}\sin(\lambda - \varphi),$$

r_0, l_0, λ_0 *étant les coordonnées écliptiques du lieu d'observation,* l, λ, P *la longitude, la latitude et la* *parallaxe horizontale de l'astre observé,* φ *un angle défini par la formule* $\tang \varphi = \frac{\tang \lambda_0}{\cos(l - l_0)}$.

Certificat de Mécanique appliquée.

1. *Théorie du volant. On traitera seulement les questions suivantes :*

1° *Rôles distincts du volant et du régulateur ;*

2° *Formule permettant de déterminer le moment d'inertie, le poids et les dimensions du volant, connaissant la puissance* Φ *de la machine en chevaux, le nombre de tours* N *par minute, le coefficient de régularité* m, *le rapport*

$$K = \frac{T}{\theta},$$

où T *désigne le travail moteur pour un tour et* θ *la plus grande valeur de la différence entre le travail moteur et le travail résistant, et enfin la valeur* v *adoptée pour la vitesse moyenne à la jante ;*

3° *Méthode employée pour déterminer le rapport* K *dans la pratique.*

2. *Une machine à vapeur pour laquelle on a* $\Phi = 30$, $N = 60$, $m = 80$, $K = 10$, $v = 12$, *fonctionne en régime normal, quand, par suite d'un accident, les résistances sont brusquement réduites aux résistances passives, propres à la machine, qui représentent un travail égal au dixième seulement du travail moteur. On suppose en outre que le régulateur soit, par suite du même accident, empêché de fonctionner, de manière que le travail moteur par tour garde sa valeur normale.*

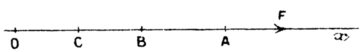
Dans ces conditions on demande de déterminer approximativement les nouvelles valeurs de la vitesse v *après* 1, 2, ..., n *tours, de manière à voir à peu près* *le temps dont dispose le mécanicien, pour arrêter l'arrivée de la vapeur avant que la machine ait pris une vitesse dangereuse.*

Marseille.

Certificat de Mécanique.

Sur une droite horizontale Ox *sont mobiles, sans frottement, trois points de même masse* A, B, C.

Le point A *est relié au point* B *par un fil élastique, et le point* B *est relié au point* C *par un fil élastique*



identique au premier; ces fils s'allongent proportionnellement à leur tension.

A l'origine du temps, les points A, B, C *sont sans vitesse et les fils sont à l'état naturel.*

On fait alors agir sur le point A *une force* F *constante et dirigée suivant* Ox, *et l'on demande de trouver le mouvement du système sachant qu'on néglige la masse des fils, que la longueur primitive de chacun d'eux est a, et qu'une tension égale à* F *doublerait la longueur de chacun de ces fils.*

On développera les valeurs des abscisses des mobiles en séries ordonnées suivant les puissances du temps, et l'on poussera ce developpement jusqu'à la sixième puissance inclusivement.

Solution.

On est conduit au type d'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho x = h\cos kt + \alpha t^2 + \beta.$$

En négligeant t^5, le point A est seul déplacé.

En négligeant t^6, les points A et B sont seuls déplacés.

Certificat d'Analyse infinitésimale (Calcul différentiel et intégral).

1° *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires, et soit* $z = f(x, y)$ *l'équation d'une surface rapportée à ces axes.*

Définir en un point le paraboloïde osculateur dont l'axe est la normale à la surface.

En considérant l'indicatrice comme la section du paraboloïde osculateur par un plan parallèle au plan tangent au sommet et situé à une distance de ce plan égale à l'unité, trouver l'équation de la projection de l'indicatrice sur le plan xOy.

Rappeler, sans démonstration, l'équation aux rayons de courbure principaux.

On appellera p, q, r, s, t *les dérivées partielles des deux premiers ordres de* z *par rapport à* x *et à* y.

2° *Soit posé* $t = x + y\sqrt{-1}$, $u = X + Y\sqrt{-1}$, *on suppose que* X *et* Y *soient des fonctions réelles des deux variables réelles et indépendantes* x *et* y, *et tellement choisies que* u *puisse être considéré comme une fonction analytique de* t. *On peut représenter la variable* t *dans le plan* xOy, *et au point* t *élever une perpendiculaire au plan* xOy, *sur laquelle on prendra des longueurs respectivement égales à* X *et à* Y. *On aura ainsi deux surfaces, dont les équations peuvent être écrites*

$$z_1 = X(x, y) \qquad \text{et} \qquad z_2 = Y(x, y).$$

Démontrer :

1° *Que l'on a entre les dérivées partielles de* z_1 *et* *de z_2 les relations*

$$p_2 = -q_1, \qquad q_2 = -p_1,$$
$$r_1 = -t_1 = s_2, \qquad r_2 = -t_2 = -s_1;$$

2° *Que les projections sur le plan xOy des indicatrices des surfaces* **X** *et* **Y** *aux points homologues sont deux hyperboles équilatères égales, et que les asymptotes de l'une coïncident avec les axes de l'autre ;*

3° *Que le produit des rayons de courbure principaux est le même dans les deux surfaces aux points homologues.*

SOLUTION.

Pour la première partie, on développe en série. Soit, en prenant le point sur l'axe des z,

$$z - z_0 = px + qy + rx^2 + 2sxy + ty^2 + \ldots.$$

Un point étant à une distance égale à l'unité du plan tangent au point $(0, 0, z_0)$, on aura

$$\frac{z' - z_0 - px' - qy'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 1,$$

et, s'il est sur la surface, on aura

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots.$$

On tire de là facilement la projection de l'indicatrice sur le plan des xy.

Pour la seconde partie, *voir* le *Traité des Fonctions elliptiques* (2e édit., p. 8) de Briot et Bouquet.

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Définir la parallaxe d'un astre ;*

2° *Indiquer la relation simple qui existe entre la parallaxe horizontale et la parallaxe de hauteur, dans l'hypothèse de la sphéricité de la Terre ;*

3° *Admettant que la surface terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des pôles, établir les formules rigoureuses qui permettent de passer de l'ascension droite* (α) *et de la déclinaison* (δ) *géocentriques à l'ascension droite* (α') *et la déclinaison* (δ') *pour un point de la surface terrestre ;*

4° *Développer en séries les différences* $\alpha' - \alpha$ *et* $\delta' - \delta$;

5° *Formules pratiques pour les astres autres que la Lune.*

Nancy.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — *Intégrer le système d'équations différentielles linéaires simultanées du premier ordre*

$$\frac{dy}{dx} - y + z = -8e^{-x},$$

$$\frac{dz}{dx} + 4y + 2z = -4e^{-x};$$

on exposera sur cet exemple une méthode d'intégration d'un tel système.

Deuxième question. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère les sphères* (Σ) *ayant leur centre sur* Oz *et dont le rayon a une longueur donnée* R.

1° *Démontrer que les trajectoires orthogonales de ces sphères sont des courbes* (C) *situées dans des plans passant par* Oz, *et que chacune d'elles est une trajectoire orthogonale d'une famille de cercles de rayon* R. *Les coordonnées des points de l'une quelconque de ces courbes, située dans le plan*

$$y = x \operatorname{tang} v,$$

peuvent être représentées par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\sin u\cos v,\\ y &= \mathrm{R}\sin u\sin v,\\ z &= \mathrm{R}\cos u + \mathrm{R}\,\mathrm{Log}\left(\mathrm{tang}\,\frac{u}{2}\right) + c, \end{aligned}\right.$$

c désignant une constante et u l'angle de la tangente à la courbe avec $\mathrm{O}z$.

2° *Lorsqu'on remplace c par une fonction de v et qu'on regarde u et v comme variables, les équations précédentes définissent une surface* (S) *engendrée par des courbes* (C) ; *démontrer qu'elle coupe orthogonalement chacune des sphères* (Σ), *et que ses lignes de courbure sont d'une part ses courbes d'intersection avec les sphères* (Σ), *d'autre part les positions successives de la génératrice* (C).

3° *Lorsqu'on suppose $c = 0$, les formules* (1) *définissent une surface* (S_0) *qui est de révolution autour de* $\mathrm{O}z$; *déterminer le produit de ses rayons de courbure principaux.*

Épreuve pratique. — *On considère la portion de la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par $y = \sin x$ et comprise entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = \pi$; on demande de déterminer :*

1° *L'aire comprise entre la courbe et l'axe des x ;*

2° *Le volume engendré par cette aire en tournant autour de* $\mathrm{O}x$;

3° *L'aire de la surface de révolution limitant ce volume.*

Solutions.

1re *question.*

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{2x} - c_2 e^{-3x} + 2e^{x}.\\ z &= - c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-3x} + 4e^{x}. \end{aligned}$$

2^e *question.* — Les trajectoires orthogonales des sphères de rayon R dont le centre se déplace sur Oz sont des courbes dont la tangente en chaque point rencontre Oz et a une longueur constante égale à R ; ce sont des tractrices dans des plans passant par Oz ; ces courbes C sont toutes égales entre elles et se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à Oz et par rotation autour de cet axe.

Si l'on considère une surface S engendrée par le déplacement d'une courbe C, la tangente à la génératrice en un point est le rayon de la sphère Σ qui passe par ce point ; par suite S est orthogonale à chacune des sphères Σ, et les courbes d'intersection de S et de ces sphères Σ sont lignes de courbure de S ; comme ces lignes coupent à angle droit chacune des génératrices C, celles-ci sont les deuxièmes lignes de courbure de la surface.

Lorsque $c = 0$, on a une surface de révolution qui n'est autre que la pseudo-sphère ; le produit des rayons de courbure principaux est constamment égal à $-R^2$.

Épreuve pratique. — Les résultats sont respectivement

$$2, \quad \frac{\pi^2}{2}, \quad 2\pi[\sqrt{2} + \operatorname{Log}(1+\sqrt{2})].$$

Certificat de Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un gyroscope formé d'un tore, d'un disque et d'un anneau extérieur à la façon ordinaire, est fixé par son centre* O ; *son anneau extérieur tourne d'un mouvement uniforme de rotation de vitesse angulaire* ω *autour de la verticale passant par* O.

On désigne par A *le moment d'inertie équatorial du tore, par* C *son moment d'inertie axial, par* A′ *le* *moment d'inertie équatorial du disque, par C' son moment d'inertie axial, et l'on suppose que l'on ait*

$$C' = 2A' = 2A = \frac{2C}{\omega}.$$

On demande :

1° *Quelle vitesse angulaire initiale de rotation il faut imprimer au tore autour de son axe pour que cet axe placé horizontalement et abandonné sans vitesse initiale tende indéfiniment vers la nadirale sans jamais l'atteindre ?*

2° *D'établir la loi du mouvement du tore autour de son axe.*

Épreuve pratique. — *On envisage un arc de chaînette homogène dont les extrémités, situées du même côté du sommet, sont les points où la normale à la courbe fait avec son axe des angles respectivement égaux à 30° et 70° ; la distance du sommet à la directrice est égale à 30cm.*

On demande de déterminer le centre de masse de cet arc et celui de la masse homogène comprise entre cet arc, les parallèles à l'axe de la chaînette menées par ses extrémités, et la directrice de la courbe.

Solution.

La théorie du gyroscope de l'énoncé se ramène, d'après les formules de Bour et de Gilbert, à celle du pendule à plan tournant.

Si θ est l'angle formé à l'instant t par l'axe du tore avec la verticale vers le bas, θ_0 l'angle formé à l'instant initial, φ l'angle définissant à chaque instant la position du tore dans sa rotation autour de son axe, et n la vitesse initiale de cette rotation, on sait que l'on a

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = n + \omega(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

de plus, le mouvement de l'axe du tore est le même que celui d'un pendule simple de longueur δ_1 dont le plan tourne autour de la verticale avec la vitesse constante ω_1, δ_1 et ω_1 étant donnés par

$$\delta_1 = g\frac{A + A'}{C\omega(n + \omega\cos\theta_0)}, \qquad \omega_1 = \omega\sqrt{\frac{A + C' - A'}{A + A'}}.$$

Le mouvement de ce pendule est donné par l'équation

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_1^2(\cos\theta - \cos\theta_0)(a - \cos\theta),$$

lorsqu'on pose

$$a = \frac{2g}{\delta_1\omega_1^2} - \cos\theta_0:$$

pour que θ tende vers zéro lorsque le temps augmente indéfiniment, il faut et il suffit que a soit égal à l'unité ; cette condition conduit, avec les données du problème, à $n = 1$.

L'équation qui fournit θ devient alors

$$-\omega\, dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta(1 - \cos\theta)}};$$

la substitution $\cos\theta(u^2 - 1) = 1$ la ramène à la forme

$$-\omega\, dt = \frac{2\, du}{u^2 - 2},$$

et l'on obtient de cette façon, en tenant compte des conditions initiales,

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\omega\sqrt{2}t} + 1}{e^{\omega\sqrt{2}t} - 1},$$

$$\cos\theta = \frac{\left(e^{\omega\sqrt{2}t} - 1\right)^2}{2\left(e^{\omega\sqrt{2}t} + 1\right)^2 - \left(e^{\omega\sqrt{2}t} - 1\right)^2}.$$

Quant à φ, il est fourni par l'équation (1), qui devient ici

$$d\varphi = dt + \cos\theta\,\omega\, dt,$$

d'où

$$\varphi - \varphi_0 = t + \int_0^t \cos\theta\, \omega\, dt;$$

en introduisant la variable u dans la dernière intégrale on a

$$\varphi - \varphi_0 = t - \int_\infty^u \frac{2\,du}{(u^2-2)(u^2-1)}$$

$$= t - \operatorname{Log}\left(\frac{u+1}{u-1}\right)\left(\frac{u-\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ou

$$\varphi - \varphi_0 = t(1+\omega) - \operatorname{Log}\frac{(\sqrt{2}+1)e^{\omega\sqrt{2}t} + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2}-1)e^{\omega\sqrt{2}t} + \sqrt{2} - 1}.$$

Lorsque t augmente indéfiniment, le mouvement du tore autour de son axe tend à devenir un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse $1 + \omega$.

Certificat d'Astronomie.

Épreuve écrite. — Première question. — *Connaissant les six éléments d'une planète, calculer pour une époque donnée les coordonnées géocentriques de la planète.*

Deuxième question. — *Démontrer qu'une fonction quelconque de deux angles, donnée arbitrairement entre les limites* 0 *et* 2π *de l'un des angles,* 0 *et* π, *de l'autre, et restant finie entre ces limites, peut être développée en série convergente de fonctions de Laplace.*

Épreuve pratique. — *A Nancy, dont la latitude est*

$$\varphi = 48^\circ 41' 31'',$$

on a observé à un certain instant l'azimut a et la distance zénithale z d'une étoile

$$a = 225^\circ 43' 20'', \qquad z = 25^\circ 44' 30'',$$

calculer l'heure sidérale de cet instant. On connaît l'ascension droite A *de l'étoile*

$$A = 9^{\circ}\,17'\,12''\,25.$$

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2az)+2a^2(x^2-y^2)=0.$$

A tout point M *de la surface* (S) *on fait correspondre un point* Q *du plan* xOy *obtenu de la façon suivante : on projette le point* M *sur le plan* xOy, *et, sur la droite joignant le point* O *à la projection* P *du point* M, *on prend un point* Q *tel que*

$$OP.OQ = k^2,$$

k désignant une longueur constante :

1° *Lorsque le point* M *de la surface* (S) *reste dans un plan* (Π), *le point correspondant* Q *décrit une conique* (C), *et, quand le plan* (Π) *se déplace, la conique* (C) *reste harmoniquement circonscrite à toutes les coniques* (Γ) *d'un faisceau tangentiel;*

2° *Quand le plan* (Π) *est tangent à la surface* (S), *la conique* (C) *se décompose en deux droites; ces deux droites sont respectivement tangentes aux deux coniques* (Γ) *qui passent par leur point d'intersection;*

3° *Trouver la condition pour que le plan* (Π) *ayant pour équation*

$$z = mx + ny + p$$

soit tangent à la surface (S);

4° *Le point* M *décrivant une ligne asymptotique de la surface* (S), *le point* Q *décrit l'une des coniques* (Γ) *du faisceau tangentiel considéré.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne une parabole* (Π) *dans le plan horizontal de projection. Par une tangente variable à la parabole* (Π) *on mène un plan* (P) *faisant avec le plan horizontal un angle constant et donné* α, *puis on considère la surface* (S) *enveloppe du plan* (P).

1° *Démontrer que la droite* Δ, *suivant laquelle le plan* (P) *touche son enveloppe, est normale à la parabole* (Π) *et fait avec le plan horizontal un angle égal à* α;

2° *La droite* Δ *reste tangente à une courbe* H *du genre hélice; construire la projection horizontale du point où la droite* Δ *touche la courbe* (H);

3° *Déterminer la trace de la surface* (S) *sur le plan vertical mené par l'axe de la parabole* (Π) *et vérifier que cette trace est une parabole.*

SOLUTION.

La surface considérée est une surface de Steiner, ayant comme point triple le point à l'infini sur l'axe des z et comme droites doubles cet axe des z et les droites joignant le point triple aux points cycliques du plan des xy. Toute section plane est une quartique à trois points doubles, unicursale; sa projection, faite du point triple sur le plan des xy, est une quartique bicirculaire ayant un point double à l'origine, et son inverse est une conique.

Les coordonnées ξ, η du point Q, inverse de P, peuvent servir de paramètres pour exprimer les coordonnées du point M de la surface; ces dernières ont pour valeur

$$x = \frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad y = \frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2}, \qquad z = \frac{\dfrac{k^4}{2a} + a(\xi^2-\eta^2)}{\xi^2+\eta^2}.$$

La section de la surface par le plan $z = mx + ny + p$ a pour conique représentative

$$\frac{k^4}{2a} + a(\xi^2 - \eta^2) - mk^2\xi - nk^2\eta - p(\xi^2 + \eta^2) = 0;$$

elle est, lorsque le plan varie, harmoniquement circonscrite aux coniques du faisceau tangentiel Γ, représenté par l'équation

$$k^4(u^2 - v^2) - 4a^2w^2 + 2\mu uv = 0.$$

Pour qu'un plan Π soit tangent à la surface, il faut et il suffit qu'il la coupe suivant une quartique à quatre points doubles, décomposable en deux coniques, par conséquent que la conique C soit réductible, ce qui donne la condition

$$am^2(a+p) - an^2(a-p) - 2(a^2 - p^2) = 0.$$

Les tangentes communes aux coniques Γ sont les quatre droites doubles du système des coniques C; ce sont les images des quatre coniques situées sur la surface et dont les plans sont tangents respectivement en tous les points de chacune d'elles.

Une asymptotique de la surface S est tangente en chacun de ses points à l'une des deux coniques de section par le plan tangent en ce point; son image doit être tangente en chaque point à l'une des droites formant une conique C décomposable et ayant ce point pour centre; les coniques du faisceau Γ jouissent précisément de cette propriété. Les lignes asymptotiques de S sont dès lors des courbes unicursales, tangentes aux quatre coniques doubles.

Certificat d'Algèbre supérieure.

Épreuves écrites. — Première question. — *Étant donnée une forme binaire cubique f, sans facteur multiple, quels sont son invariant et ses deux covariants* *principaux? Comment réduit-on f à la forme canonique.*

Deuxième question. — *On considère le faisceau tangentiel des coniques homofocales* Σ *représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(1+\mu)u^2 + \mu v^2 - w^2 = 0,$$

où μ *est un paramètre variable :*

1° *Déterminer toutes les coniques* S *qui sont harmoniquement circonscrites à la fois à toutes les coniques* Σ ; *elles forment un système triplement infini de la forme*

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0.$$

Déterminer les couples de points qui sont conjugués à la fois par rapport à toutes les coniques S *et celles de ces coniques qui se réduisent à une droite double ;*

2° *Chaque point du plan est le centre d'une conique* S *réductible à deux droites ; former l'équation de cette conique ;*

3° *Par un point du plan passent une infinité de coniques* S *formant un réseau ; déterminer la jacobienne et la courbe de Hermite de ce réseau.*

Épreuve pratique. — *On considère la cubique représentée par l'équation*

$$x^3 - y^2 - 2 = 0$$

et le point de coordonnées $x = 1$, $y = 1$ *situé sur cette courbe.*

Former l'équation aux coefficients angulaires des tangentes à la courbe issues de ce point, autres que celle qui y a son point de contact. Appliquer la théorie des invariants à la réduction du premier membre de cette équation à la forme bicarrée et à la recherche *des racines. Quel est le rapport anharmonique des tangentes considérées?*

SOLUTION (ALGÈBRE SUPÉRIEURE).

Les coniques harmoniquement circonscrites à toutes les coniques Σ ont pour équation

$$\lambda_1(x^2 - y^2 + z^2) + 2\lambda_2 yz + 2\lambda_3 zx + 2\lambda_4 xy = 0;$$

elles sont conjuguées par rapport aux trois couples d'ombilics du faisceau tangentiel, et les droites doubles du système sont les quatre tangentes communes aux quadriques Σ.

Par chaque point du plan passent deux droites constituant une conique S; ce sont les tangentes aux deux coniques Σ qui passent par ce point.

Si les coniques S passent par un point M, la courbe de Hermite du réseau se décompose dans ce point et dans la parabole bien connue enveloppe des polaires de ce point par rapport aux coniques Σ; la jacobienne est la strophoïde podaire de cette parabole par rapport au point M : c'est la focale à nœud.

En général, si l'on considère le système des coniques

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0,$$

et si J_{123} est la jacobienne de S_1, S_2, S_3 l'équation

$$\begin{aligned} &S_1(x, y, z) J_{234}(x', y', z') - S_2(x, y, z) J_{134}(x', y', z') \\ &\quad + S_3(x, y, z) J_{124}(x', y', z') - S_4(x, y, z) J_{123}(x', y', z') = 0 \end{aligned}$$

représente, lorsque x', y', z' sont les coordonnées d'un point fixe, la conique S réductible ayant son centre en ce point; si au contraire x, y, z sont les coordonnées d'un point fixe, et si x', y', z' sont variables, elle représente la jacobienne du réseau des coniques S passant par le point fixe.

Poitiers.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

COMPOSITION. — *Soient* M *un point quelconque d'une surface* S, N *le point où la normale* MN *rencontre le plan* xOy, *trouver les surfaces* S *telles que* MN = ON. — *Lignes de courbure de ces surfaces.* — *Lignes asymptotiques de la surface* S *qui contient la droite* $y = 0$, $x = 2a$.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE.

COMPOSITION. — *Un tore ou anneau homogène, pesant, préalablement animé d'une très grande vitesse de rotation autour de son axe de figure est posé sur un plan horizontal, son axe faisant un angle* θ_0 *avec la verticale et son centre de gravité ayant une vitesse initiale nulle. On demande d'étudier son mouvement en négligeant tout frottement.* — *Lieu du point de contact sur le plan horizontal.* — *Données :* a, *distance du cercle méridien à l'axe ;* b, *le rayon de ce cercle.*

$$\theta_0 = \frac{\varpi}{4}, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \psi'_0 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cône de révolution homogène dont la hauteur est de* 1^m *et dont le demi-angle au sommet est de* 30° *est suspendu par une de ses arêtes supposée horizontale. Trouver la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé.*

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

COMPOSITION. — *Exposer la méthode pour déterminer la longueur du méridien terrestre, en suppo-*

sant connues les colatitudes extrêmes d'un arc, la longueur de cet arc et une valeur approchée de l'aplatissement.

Montpellier.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une surface rapportée à trois axes rectangulaires est représentée par l'équation*

$$(x^2+y^2+z^2-a^2)^2 = 8a^2xy.$$

On demande : 1° de trouver les deux systèmes de lignes de courbure; 2° pour un point arbitraire de la surface, calculer les coordonnées des centres et les rayons de courbure principaux qui correspondent à chacune des deux lignes de courbure passant par ce point; 3° si le point donné décrit une ligne de courbure, démontrer que le centre de courbure correspondant est fixe; 4° déterminer le lieu de tous ces centres de courbure principaux.

SOLUTION.

La solution est immédiate si l'on remarque que la surface est l'enveloppe des deux systèmes de sphères

$$ax\lambda^2 + (x^2+y^2+z^2-a^2)\lambda + 2ay = 0,$$
$$x^2+y^2+z^2+a^2 = 2a(x+y)\cos\mu + 2az\sin\mu.$$

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Problème de Képler. — En partant des lois de Képler, trouver en fonction du temps l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et la longitude d'une planète. Développements en série.*

On demande de calculer l'obliquité de l'écliptique et l'ascension droite du point vernal, comptée à partir du méridien M.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un solide homogène est limité par la surface d'un paraboloïde de révolution et le plan d'un parallèle; a étant le paramètre de la méridienne, la distance du parallèle au sommet est* $\frac{3}{4}a$.

1° *Déterminer la position du centre de gravité du solide.*

2° *Le solide étant en contact, par un point de la surface du paraboloïde, avec un plan horizontal fixe sur lequel on peut glisser sans frottement, on lui imprime la rotation* ω *autour de son axe et on l'abandonne à l'action des forces qui le sollicitent. Etudier son mouvement. Indiquer d'une manière générale les formes des courbes décrites par le point de contact sur le plan fixe et sur le paraboloïde. Considérer en particulier le cas où* $\omega = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le tétraèdre* OABC, *les arêtes* OA, OB, OC *ont respectivement pour longueurs a, b, c, et sont rectangulaires deux à deux. On suppose le tétraèdre rempli d'une matière homogène de densité égale à l'unité. Quelles relations doivent exister entre a, b, c pour que l'ellipsoïde d'inertie relatif à* O *soit de révolution? Ces relations étant satisfaites, déterminer l'axe et la méridienne de cet ellipsoïde.*

Toulouse.

Certificat d'Analyse.

I. *On considère la surface algébrique du quatrième ordre définie par les formules*

$$x = u^2,$$
$$y = uv,$$
$$z = v^2 + 2u$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z *d'un de ses points en fonction de deux paramètres* u *et* v.

1° *Démontrer que la section de cette surface par un quelconque de ses plans tangents se compose de deux coniques;*

2° *Déterminer ses lignes asymptotiques et démontrer que ce sont des courbes algébriques unicursales;*

3° *Calculer en chacun de ses points ses rayons de courbure principaux.*

II. *Calculer, en se servant du théorème de Cauchy, la valeur de chacune des intégrales définies*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 - x + x^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + x + x^2}\, dx.$$

Certificat de Mécanique.

I. *Démontrer le théorème de Coriolis sur le mouvement relatif d'un point matériel.*

II. *On donne un fil homogène parfaitement flexible qui tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un axe* Ox *auquel il est attaché par ses extrémités en deux points fixes* A *et* B. *On négligera l'action de la pesanteur. On demande la figure* *d'équilibre de ce fil et la tension en chacun de ses points.*

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On désigne par* R, R_1, R_2 *trois fonctions dépendant respectivement, la première de la seule variable* ρ, *la deuxième de la variable* ρ_1, *la troisième de la variable* ρ_2, *et par* R', R'_1, R'_2 *les dérivées de ces trois fonctions.*

1° *Démontrer que les trois familles de surfaces que l'on obtient en donnant successivement à* ρ, ρ_1, ρ_2 *des valeurs constantes dans les formules*

$$x = 2\rho\,\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R',$$

$$y = 2\rho_1\,\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R'_1,$$

$$z = 2\rho_2\,\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R'_2,$$

où x, y, z *désignent les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point de l'espace, constituent un système triple orthogonal.*

2° *Établir que ces trois familles sont formées de surfaces ayant toutes leurs lignes de courbure planes.*

II. *Trouver la fonction la plus générale de* $x+y$ *qui vérifie l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}.$$

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui peut se mettre sous la forme irrationnelle suivante*

$$\sqrt{p}+\sqrt{q} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$$

où p *et* q *désignent les dérivées* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *par rapport* *aux variables indépendantes* x *et* y, *de la fonction inconnue* z.

1° *Trouver l'intégrale générale de cette équation ;*

2° *Déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont*

$$x = 0, \qquad y^2 = 2z.$$

Certificat de Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Étudier le mouvement d'un solide de révolution homogène suspendu par un point de son axe et soumis uniquement à des forces telles que la fonction potentielle correspondante est représentée par l'expression* $H \cos^2\theta$: H *désignant une constante,* θ *l'angle formé par l'axe du solide avec une droite de direction constante passant par le point fixe.*

Épreuve pratique. — *Déterminer le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon* R, *de densité* ρ *relativement à un axe tangent à sa surface.*

Certificat d'Astronomie.

Épreuve écrite. — *Exposer et justifier la méthode de Gauss pour la détermination de l'orbite elliptique d'une planète d'après trois observations équatoriales complète en s'en tenant à la première approximation.*

On désignera par r, r', r'' *les rayons vecteurs menés du Soleil à la planète aux moments des trois observations ; par* θ, θ', θ'' *les produits de la constante de Gauss par les intervalles de temps écoulés respectivement entre la seconde et la troisième, entre la première et la troisième, entre la première et la seconde; par* $[rr']$ *le double de l'aire du triangle compris entre* r, r' *et la droite qui joint leurs extrémités; par* $[r'r'']$ *et par* $[r\,r'']$ *des quantités analogues. On regardera comme* *établies les formules*

$$\frac{[r'r'']}{[rr'']} = \frac{\theta}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta''(\theta'\theta'' - \theta^2)}{4r'^4}\,\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right],$$

$$\frac{[rr']}{[rr'']} = \frac{\theta''}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta''^2 - \theta'^2}{6r'^3} - \frac{\theta(\theta\theta' - \theta''^2)}{4r'^4}\,\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right].$$

Certificat de Géométrie supérieure.

Épreuve écrite. — *Soient f_1, f_2, f_3, f_4 des formes quadratiques de trois paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 dont les coefficients sont donnés, on considère la surface* S *définie par les formules*

$$\rho x_1 = f_1, \qquad \rho x_2 = f_2, \qquad \rho x_3 = f_3, \qquad \rho x_4 = f_4,$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

1° *Déterminer la ligne double de cette surface.*

2° *Donner une classification des surfaces telles que* S *selon la nature de cette ligne double.*

3° *Démontrer que la surface* S *est, en général, le lieu d'un point dont les racines carrées des distances à quatre plans fixes sont liées par une relation linéaire et homogène.*

4° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface* S.

5° *Trouver le lieu des centres des coniques tracées sur cette surface.*

Épreuve pratique. — *On donne un cône* C *dont le sommet est dans le plan vertical de projection et dont la base, située dans le plan horizontal, est une ellipse* E *ayant son grand axe parallèle à la ligne de terre. Construire les projections de la courbe double de la surface réglée engendrée par les normales au cône* C *en tous les points de l'ellipse* E.