Concours d'agrégation de 1895. Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 524-530

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__524_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1895.
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par UN CORRESPONDANT [1].

Première et deuxième Partie. — Je rappelle la proposition bien connue suivante :

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à toutes les quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite; chaque point de cette droite est le pôle du plan par rapport à une surface déterminée du faisceau. En particulier, le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques homofocales est une droite perpendiculaire à ce plan.

Cela posé, je considère le faisceau tangentiel des quadriques S inscrites dans la développable circonscrite à un ellipsoïde E et à une sphère Σ de centre A; je dis que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan Π satisfasse à la condition indiquée dans l'énoncé, d'être tangent à une quadrique S, au pied P d'une normale issue de A, est que ce plan soit perpendiculaire à la droite joignant le point A à son pôle p par rapport à l'ellipsoïde E.

[1] *Voir* l'énoncé, ci-dessus, p. 251.

La condition est nécessaire, car si j'appelle q le pôle du plan Π par rapport à la sphère, ce point est sur la perpendiculaire abaissée du centre A sur le plan; cette perpendiculaire, contenant les pôles P et q de Π par rapport à S et Σ, passera par le pôle p du même plan Π par rapport à l'ellipsoïde E, et Ap sera bien perpendiculaire à Π.

La condition est suffisante, car si la droite Ap est perpendiculaire à Π, elle passe par le pôle q de ce plan par rapport à Σ; comme elle passe par p et q, elle est le lieu des pôles du même plan par rapport à toutes les quadriques S; le point P, commun à la droite et au plan, est alors le point de contact de celle des quadriques S qui est tangente au plan, et la normale à cette surface passe bien par le point A.

Les plans Π qui satisfont à la condition précédente constituent un ensemble bien connu de plans; les points p sont les points de la cubique des pieds des normales abaissées de A sur l'ellipsoïde E, et les plans Π sont les plans de la développable de troisième classe, polaire réciproque de cette cubique par rapport à cet ellipsoïde; cette développable est inscrite dans le tétraèdre formé par les plans de coordonnées et le plan de l'infini. La cubique et la développable précédentes jouent dans l'espace le même rôle que l'hyperbole d'Apollonius et la parabole de Chasles dans la théorie des coniques.

Étant donné un plan Π, le lieu de ses pôles par rapport aux quadriques S est la droite Ap; c'est aussi le lieu des pôles du même plan par rapport aux quadriques H, homofocales à l'ellipsoïde, d'après la propriété de Ap de passer par p et d'être normale au plan Π. Le point A de cette droite est alors, comme on le sait, le pôle de Π par rapport à une quadrique S et aussi par rapport à une quadrique H; les réciproques sont exactes.

Si A est, en effet, le pôle de Π par rapport à une quadrique S, Aq est le lieu des pôles de Π par rapport à ces quadriques, et elle est perpendiculaire à ce plan Π, qui satisfait dès lors aux conditions de l'énoncé; si, d'autre part, A est le pôle de Π par rapport à une quadrique H, le lieu des pôles de Π par rapport aux homofocales H est la perpendiculaire abaissée de A sur le plan Π, et cette droite contient le pôle p par rapport à l'ellipsoïde E; Ap est donc encore perpendiculaire au plan Π. On voit ainsi que la développable constituée par les plans Π est identique à la développable formée par les plans polaires de A par rapport aux quadriques H homofocales à E.

En considérant maintenant le point à l'infini sur la droite Apq normale au plan Π, ce point est le pôle du plan Π par rapport à une quadrique S; cette quadrique admet alors le plan Π comme plan principal. Réciproquement, si un plan Π est plan principal d'une quadrique du faisceau S, le lieu de ses pôles par rapport à toutes les quadriques de ce faisceau est la normale au plan menée par le point q, qui est son pôle par rapport à la sphère Σ, et cette normale passe par A; dès lors le plan Π satisfait aux conditions de l'énoncé.

Troisième et quatrième Partie. — Par un point M de l'espace passent trois plans de la développable; chacun d'eux est le plan polaire de A par rapport à une seule surface H; on peut donc considérer comme coordonnées particulières de M les paramètres déterminant les trois quadriques homofocales correspondant aux trois plans issus de ce point.

Pour exprimer les coordonnées x, y, z du point M au moyen des trois paramètres λ, μ, ν des quadriques précédentes, nous considérerons le plan polaire du point A (x_0, y_0, z_0) par rapport à la surface

$$H_\rho = \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0,$$

homofocale à l'ellipsoïde; les coordonnées de ce plan sont

$$(1) \qquad u = \frac{-x_0}{a^2-\rho}, \qquad v = \frac{-y_0}{b^2-\rho}, \qquad w = \frac{-z_0}{c^2-\rho};$$

ces équations définissent, lorsque ρ varie, les plans successifs de la développable.

En écrivant qu'un de ces plans passe par le point (x, y, z) on a une équation en ρ qui est du troisième degré; en désignant par λ, μ, ν ses trois racines, on a identiquement

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho} + \frac{yy_0}{b^2-\rho} + \frac{zz_0}{c^2-\rho} - 1 = \frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)},$$

et la méthode classique de décomposition du second membre en fractions simples donne les valeurs suivantes pour x, y, z :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\[2ex] y = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{y_0(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \\[2ex] z = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{z_0(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \end{cases}$$

Si l'on suppose dans ces formules que les deux nombres μ et ν deviennent égaux, et si l'on y regarde λ et μ comme paramètres variables, elles définissent la surface développable du quatrième ordre, enveloppe des plans Π; lorsqu'on y laisse μ constant, x, y, z sont les coordonnées des points successifs d'une génératrice de cette surface; au contraire, lorsqu'on y laisse λ constant, x, y, z sont les coordonnées des points d'une conique; cette conique est située dans le plan polaire de A, par rapport à la surface H_λ, et constitue une partie de l'intersection de la surface développable par ce plan; le reste de l'intersection est constitué par la génératrice de contact de ce même plan et de la surface, cette génératrice étant comptée comme droite double.

Si l'on suppose que λ, μ et ν deviennent égaux, les formules donnant x, y, z définissent alors, quand λ varie, les points successifs de la cubique gauche arête de rebroussement de la développable; cette cubique admet comme plans osculateurs particuliers les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini.

Je vais montrer que le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π qui y passent sont rectangulaires est la droite OA; cette droite joue pour la développable le même rôle que la directrice pour une parabole. Pour cela, je remarque d'abord que les plans Π sont en même temps les plans principaux des quadriques du faisceau tangentiel S; les centres de ces quadriques ont précisément pour lieu la droite OA, et de chaque point de cette droite sont issus trois plans Π rectangulaires, savoir les plans principaux de la quadrique S ayant son centre en ce point.

Il reste à faire voir qu'il ne peut exister d'autres systèmes de plans Π formant un trièdre trirectangle que ceux que nous venons de mentionner; supposons en effet qu'il en existe, considérons l'un d'eux, et désignons par Π_1 l'un des trois plans qui le constituent, par Π_2 et Π_3 les deux autres et par D_1 l'intersection de ces derniers. Le plan Π_1 est plan principal pour une quadrique que nous appellerons S_1 et dont nous désignerons le centre par M_1; ce point M_1 est le sommet d'un trièdre trirectangle constitué par les plans principaux de S_1, et dont les faces appartiennent à la développable des plans π;

l'une de ces faces est le plan Π_1, et les deux autres vont passer par le point d_1 situé à l'infini dans la direction D_1 qui est normale à Π_1.

Or par ce point d_1 ne passent, outre le plan de l'infini, que deux plans de la développable; on en conclut que les plans Π_2 et Π_3 ne peuvent différer des deux autres plans principaux de S_1, et que le sommet du trièdre primitif doit se confondre avec M_1.

Nous avons ainsi montré que les systèmes de trièdres trirectangles formés de plans de la développable sont identiques aux systèmes de plans principaux des quadriques S successives.

Cinquième et sixième Partie. — La section de la surface enveloppe des plans Π par un de ces plans se compose, avons-nous dit, de la génératrice de contact comptée comme droite double, et d'une conique enveloppe des traces des autres plans de la développable sur le premier. Cette conique est complètement déterminée, car elle est tangente à la génératrice de contact de son plan, et aussi aux traces de ce plan sur les plans de coordonnées et sur le plan de l'infini; elle est donc une parabole.

Nous déterminerons par le calcul le lieu des foyers de ces paraboles, en cherchant les coordonnées du foyer de celle de ces courbes qui est située dans un plan donné de la développable. Si nous nous reportons aux équations (2) et si nous y supposons λ fixe, μ et ν variables, elles fournissent les coordonnées des points du plan représenté par l'équation

$$\frac{xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{zz_0}{c^2-\lambda}-1=0;$$

et ce plan, que nous appellerons Π_λ, appartient à la développable. A chaque système de valeurs données à μ

et à ν correspondent deux autres plans Π_μ et Π_ν représentés par les équations

$$\frac{xx_0}{a^2-\mu}+\frac{yy_0}{b^2-\mu}+\frac{zz_0}{c^2-\mu}-1=0,$$

$$\frac{xx_0}{a^2-\nu}+\frac{yy_0}{b^2-\nu}+\frac{zz_0}{c^2-\nu}-1=0,$$

et les traces de ces deux plans sur le premier sont deux tangentes à la parabole qui y est contenue; enfin, les valeurs de x, y, z fournies par les équations (2) sont précisément les coordonnées du point de rencontre de ces deux tangentes.

Pour que ce point soit le foyer de la parabole du plan Π_λ, il faut et il suffit que les droites d'intersection de ce plan avec les plans Π_μ et Π_ν soient deux droites isotropes, c'est-à-dire rencontrent le cercle imaginaire de l'infini.

Ces conditions sont exprimées par la relation facile à obtenir

$$\Phi(\mu)=\Sigma y_0^2 z_0^2(b^2-c^2)^2(a^2-\lambda)^2(a^2-\mu)^2=0$$

et par la relation analogue $\Phi(\nu)=0$ obtenue en remplaçant μ par ν; autrement dit, les deux paramètres μ et ν doivent être les deux racines de l'équation $\Phi(\mu)=0$, où λ est fixe, et où μ est l'inconnue.

Il suffit de transporter les valeurs de ces racines à la place de μ et ν dans les formules (2) pour obtenir les coordonnées du foyer; la valeur de x est

$$x=x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)\frac{(a^2-\lambda)[(b^2-\lambda)^2z_0^2+(c^2-\lambda)^2y_0^2]}{\Sigma(a^2-\lambda)^2(b^2-c^2)^2y_0^2z_0^2},$$

et celles de y et de z sont analogues.

On voit que, lorsque λ varie, le foyer décrit une cubique gauche.