NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1895

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 520-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__520_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1895 [1].

Mathématiques élémentaires.

On donne un triangle T et l'on considère le triangle T' qui a pour sommets les projections orthogonales d'un point M sur les côté du triangle T.

[1] Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* n'ont pas publié les sujets du concours d'Agrégation en 1895. Nous croyons répondre au désir d'un grand nombre de nos lecteurs en comblant cette lacune.

(LES RÉDACTEURS.)

1° Démontrer que, si le point M décrit une droite Δ dans le plan du triangle T, les côtés du triangle T' enveloppent trois paraboles P, P_1, P_2.

Ces paraboles sont inscrites dans le même angle; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point?

2° Comment faut-il choisir la droite Δ pour que les directrices des trois paraboles P, P_1, P_2 concourent en un même point H à distance finie?

La droite Δ se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point H.

3° Démontrer que, si l'on fait tourner la droite Δ autour d'un point fixe K, la directrice de la parabole P passe elle-même par un point fixe I.

Trouver l'enveloppe de la droite KI lorsque l'un des points K ou I décrit une droite donnée.

4° A un point K correspondent trois points : I, I_1, I_2, relatifs aux directrices des paraboles P, P_1, P_2.

On demande quelle position doit occuper le point K pour que les trois points I, I_1, I_2 soient en ligne droite, et l'on propose de démontrer que, si le point K se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite I, I_1, I_2 tourne autour d'un point fixe.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et une sphère de rayon r et de centre $A(x_0, y_0, z_0)$.

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E; du point A l'on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S, et au pied P de cette normale on mène le plan tangent Π à cette quadrique.

1° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à une surface H, homofocale à l'ellipsoïde E, représentée par l'équation

$$H_\rho = \frac{x^2}{a^2 - \rho} + \frac{y^2}{b^2 - \rho} + \frac{z^2}{c^2 - \rho} - 1 = 0.$$

2° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques.

Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies?

3° Par tout point M de l'espace il passe trois plans Π polaires du point A par rapport à trois quadriques H_λ, H_μ, H_ν du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres λ, μ, ν.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan Π, soit quant il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan Π coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique? En connaît-on des tangentes remarquables?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)(x^2 + 2axy + y^2) + xy = 0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire.

Le paramètre a ayant une valeur quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe C.

2° Former les intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe.

3° Former une intégrale de troisième espèce devenant infinie au point double de la courbe C.

4° Écrire à l'aide de ces intégrales, par l'application du théorème d'Abel, les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe C soient en ligne droite, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe soient sur la même conique.

Examiner le cas particulier où la droite et la conique passent sur le point double de la courbe C.

5° Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe C en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

6° Déterminer les valeurs du paramètre A pour lesquelles le genre de la courbe C s'abaisse.

On étudiera en particulier l'hypothèse $a = 0$ et l'on résoudra les problèmes suivants pour la courbe particulière D qui correspond à cette hypothèse :

I. Que deviennent, pour la courbe D, les intégrales de première espèce relatives à la courbe générale C?

II. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe D soient en ligne droite et les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe soient sur une conique.

III. Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe D en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

IV. Déterminer les points d'inflexion et les tangentes doubles de la courbe D.

Composition de Mécanique rationnelle.

On considère un corps solide S pesant, ayant la forme d'un cône droit dont le rayon de base est R. Le centre de gravité de ce corps est situé en un point O de l'axe de révolution du cône, à une distance R de sa base.

L'ellipsoïde d'inertie du corps S relatif au centre de gravité O est une sphère.

Le cône S est mobile autour de son centre de gravité O, supposé fixe, et la circonférence de sa base est tangente à un plan horizontal fixe Π situé au-dessous du point O à une distance R de ce point.

Étudier le mouvement du corps S en supposant que la circonférence de base du cône glisse avec frottement sur le plan Π.

Calculer la réaction du plan Π et celle du point fixe O.

Conditions initiales. — Soient OO′ la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan Π et OC la position initiale de la perpendiculaire abaissée du point O sur la base du cône :

A l'époque $t = 0$, l'axe instantané de rotation est situé dans l'angle COO' et le sens de la rotation initiale est choisi de telle sorte que le corps S appuie sur le plan Π.