NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1897. Compositions

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 16 (1897), p. 505-520
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__505_0>

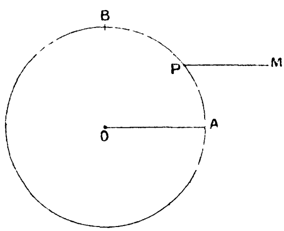
# CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

## SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

### Caen.

CERTIFICAT D'ÉTUDES N° 1. — ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

I. *Un point* P, *partant d'une position donnée* A, *parcourt, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, une circonférence donnée, de centre* O : *par une quelconque de ses positions, on mène un seg-*




*ment* PM, *ayant même direction et même sens que le rayon* OA, *et même longueur que l'arc de cercle* AP :

1° *Déterminer la trajectoire décrite par le point* M *quand le point* P *parcourt la circonférence;*

2° *Calculer la longueur de cette trajectoire;*

3° *Évaluer l'aire balayée par le segment* PM *quand* P *parcourt le quadrant* AB;

4° *Calculer l'aire balayée dans le même temps par le rayon vecteur* OM.

II. *Un point pesant, de masse $m$, est abandonné sans vitesse à l'action de son poids : il tombe dans un milieu qui oppose une résistance dirigée en sens contraire de la vitesse et égale au produit de cette vitesse par $\frac{2mt}{1+t^2}$, $t$ désignant le temps écoulé depuis qu'on a laissé tomber le mobile. Déterminer la loi du mouvement. Construire et étudier la courbe propre à représenter la loi des vitesses en fonction du temps.*

SOLUTIONS.

I. 1° Les coordonnées de M sont de la forme

$$x = R(\theta + \cos\theta), \qquad y = R\sin\theta;$$

le lieu est une portion de cycloïde ayant son rebroussement sur la tangente au cercle en B ;

2° $$S = R\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 8R;$$

3°, 4° Les deux aires sont égales à $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2$.

II. Équation du mouvement : $\frac{dv}{dt} + \frac{2vt}{1+t^2} = g$ :

$$v = \frac{1}{3}g\frac{3t+t^3}{1+t^2}\ \frac{1}{3}g\left(t + \frac{2t}{1+t^2}\right);$$

$$s = \frac{1}{6}gt^2 + \frac{1}{3}g\log(1+t^2).$$

CERTIFICAT N° 2. — CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Intégrer le système des équations simultanées*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v + 2\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= u + 2\frac{\partial v}{\partial x}, \\ v^2 &- 4u^2 - 1 = 0, \end{aligned}\right.$$

*où $u$, $v$ désignent deux fonctions inconnues des variables indépendantes $x$ et $y$.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère les surfaces engendrées par une parabole mobile de grandeur variable, dont le plan reste parallèle à* XOZ, *l'axe parallèle à* OZ, *et le sommet situé dans* YOZ : *on propose de rechercher quelles sont, parmi ces surfaces, celles où les sections par des plans parallèles à* XOY *constituent une première série de lignes asymptotiques.*

SOLUTIONS.

I. De l'équation finie on tire $v$ en fonction de $u$ : substituant dans les deux premières, on a deux équations d'où l'on tire $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, et, par suite,

$$du = -\frac{2\,dx + 3\,dy}{4}\sqrt{1+4u^2}:$$

intégrant, et substituant dans $v$, on trouve

$$4u = Ce^{-\frac{2x+3y}{2}} - \frac{1}{C}e^{\frac{2x+3y}{2}}; \qquad 2v = Ce^{-\frac{2x+3y}{2}} + \frac{1}{C}e^{\frac{2x+3y}{2}}.$$

II. L'équation générale des surfaces S est de la forme

$$z = x^2 f(y) + \varphi(y): \tag{1}$$

la condition imposée à la surface cherchée donne

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Remplaçons les dérivées partielles $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ par leurs valeurs tirées de (1) :

$$\begin{aligned}&[2f(y)f''(y) - 3f'^2(y)]x^4\\ &\quad + 2[f(y)\varphi''(y) - f'(y)\varphi'(y)]x^2 + \varphi'^2(y) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement : on en conclut

$$\varphi(y) = C, \qquad f(y) = \frac{a}{(y+b)^2}, \qquad z = \frac{ax^2}{(y+b)^2} + C :$$

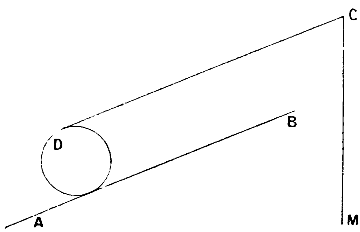
la surface cherchée est un conoïde.

### Certificat d'études n° 3. — Mécanique.

I. *Démontrer le théorème général d'Ivory sur les attractions de deux ellipsoïdes homofocaux.*

II. *On donne une sphère pleine d'une substance homogène, dont chaque elément possède un pouvoir attractif proportionnel à sa masse et à l'inverse du cube de sa distance au point attiré. Déterminer l'attraction de la sphère sur un point intérieur et en déduire, par le théorème d'Ivory, l'attraction sur un point extérieur.*

III. *Un disque homogène* D, *infiniment mince, de poids* P, *a la forme d'un cercle de rayon* R; *il s'appuie sur une droite* AB, *inclinée de* 30° *sur l'horizon, et son*




*plan doit coïncider avec le plan vertical* V *conduit par* AB. *Un fil très mince, inextensible et de masse négligeable, a une de ses extrémités fixée en un point de la circonférence de* D : *il s'enroule autour du disque, s'en détache en suivant une direction parallèle à* AB, *passe dans un petit anneau* C, *fixé dans le plan* V *à une distance* 2 R *de la droite* AB, *puis se termine par* *une portion verticale* CM *qui supporte à son extrémité un poids* P. *Le système, d'abord maintenu en repos, est abandonné à l'action de la pesanteur : déterminer le mouvement qu'il va prendre, en supposant qu'aucune force de frottement n'entre en jeu.*

SOLUTIONS.

II. Point intérieur de coordonnées $x$, o, o :

$$X = 2\pi\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \log \frac{\sqrt{R^2 - x^2 \sin^2\theta} - x\cos\theta}{\sqrt{R^2 - x^2 \sin^2\theta} + x\cos\theta}\, d\theta,$$

$$= \pi\mu \frac{R}{x} - \pi\mu \frac{R^2 + x^2}{2x^2} \log \frac{R + x}{R - x}.$$

Pour le point extérieur, on imagine une sphère de rayon $x$ exerçant sur un point (R, o, o) une attraction X se déduisant de la précédente par la permutation de $x$ et R : on en conclut, par la règle d'Ivory,

$$X = \frac{R^2}{x^2} X' = \pi\mu \frac{R}{x} - \pi\mu \frac{R^2 + x^2}{2x^2} \log \frac{x + R}{x - R}.$$

III. Soient $x$ la quantité dont s'est déplacé le centre du disque dans la direction AB, $\theta$ l'angle dont D a tourné, $z$ la quantité dont M a descendu au temps $t$ : la Cinématique donne

$$(1) \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + R\frac{d\theta}{dt}.$$

Soit T la tension du fil : on aura

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{1}{2}P, \qquad \frac{P}{2g}R\frac{d^2\theta}{dt^2} = T, \qquad \frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = P - T.$$

Ces équations, combinées avec (1) donnent

$$T = \frac{3}{8}P, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{8}g, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{4}\frac{g}{R}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{5}{8}g.$$

Épreuve pratique. — *Sur la courbe définie par l'équation*

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},$$

*on considère l'arc* AO *correspondant aux valeurs de* $\theta$ *comprises entre zéro et* $\frac{\pi}{4}$. *Calculer la distance du pôle au centre de gravité du solide homogène compris à l'intérieur de la surface engendrée par la révolution de l'arc* AO *autour de l'axe polaire.*

Réponse :

$$\xi = \frac{17 - 24\log 2}{24\log 2 - 16} = 0,574.$$

## Dijon.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

I. *Réduction des intégrales de la forme* $\int F(x, y)\,dx$, *où* F *est une fonction rationnelle, où* $y$ *représente la racine carrée d'un polynome entier en* $x$.

II. *Trouver la ligne qu'enveloppe la droite représentée par les deux équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x + az + ab = 0, \\ y + bz + ab = 0, \end{cases}$$

*quand on* $y$ *réduit les deux paramètres* $a$, $b$ *à un seul par la substitution à* $b$ *d'une fonction de* $a$ *convenablement choisie.*

*Trouver la surface enveloppée par la même droite* (1) *quand on* $y$ *laisse au contraire les paramètres* $a$, $b$ *tout à fait indépendants l'un de l'autre.*

### IDÉE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME.

Pour l'existence d'une ligne enveloppe il faut que les équations (1) et celles-ci

$$(2)\qquad \begin{cases} z + b + a\dfrac{db}{da} = 0, \\ z\dfrac{db}{da} + b + a\dfrac{db}{da} = 0, \end{cases}$$

provenant de leur différentiation par rapport à $a$ puissent être résolues par rapport à $x$, $y$, $z$, ce qui conduit d'abord à la condition

$$\begin{vmatrix} 1 & b + a\dfrac{db}{da} \\ \dfrac{db}{da} & b + a\dfrac{db}{da} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{db}{da}\right)\left(b + a\frac{db}{da}\right) = 0.$$

se décomposant en

$$\frac{db}{da} - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = a + C,$$

$$b + a\frac{db}{da} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad ab = C.$$

La deuxième alternative conduit à

$$(3)\qquad x = -C, \qquad y = -C, \qquad z = 0,$$

formules représentant une infinité de points ayant pour lieu la bissectrice de l'angle formé par la direction de même nom des axes des $x$ et des $y$ (cas de dégénérescence de l'enveloppe).

La première conduit à

$$x = a^2, \qquad y = (a + C)^2, \qquad z = -2a - C$$

ou bien, par l'élimination de $a$, à

$$(4) \qquad x = y + Cz = \left(\frac{z+C}{2}\right)^2,$$

équations représentant une famille de coniques, au paramètre indéterminé C, dont les plans passent tous par la droite lieu des points (3).

Pour l'existence d'une surface-enveloppe, dans le cas où les paramètres $a$, $b$ sont laissés indépendants, il faut que les équations (1) et celle-ci

$$\begin{vmatrix} z+b & a \\ b & z+a \end{vmatrix} = z(z+a+b) = 0,$$

obtenue en égalant à o le déterminant différentiel de leurs premiers membres pris par rapport au couple $(a, b)$, puissent être résolues par rapport à $x$, $y$, $z$. La décomposition de cette dernière équation conduit soit à

$$x = -ab, \qquad y = -ab, \qquad z = 0,$$

formules représentant la droite lieu des points (3) (cas de dégénérescence de la surface-enveloppe), soit à

$$x = a^2, \qquad y = b^2, \qquad z = -(a+b),$$

représentant une surface véritable, pour l'équation ordinaire de laquelle l'élimination de $a$, $b$ entre ces trois dernières formules conduit à

$$z^4 - 2(x+y)z^2 + (y-x)^2 = 0.$$

Cette surface est précisément celle qu'engendre la ligne (4) quand on y fait varier indéfiniment le paramètre C.

### Certificat de Mécanique.

Problème. — *Mouvement relatif dans un plan d'un point pesant assujetti à y rester, le plan étant animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour d'un axe vertical.*

## Grenoble.

### Certificat d'Astronomie.

Composition. — 1° *Développer suivant les puissances de l'excentricité, et en fonction des multiples de l'anomalie moyenne : l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et la longitude du Soleil. Équation du centre. On négligera* $e^4$.

2° *Coordonnées équatoriales du Soleil. Équation du temps : elle s'annule quatre fois par an.*

### Certificat de Calcul différentiel et intégral.

Composition. — *On considère une sphère de rayon constant* R *dont le centre* $\mu$ *décrit une hélice* $\Sigma$ *tracée sur un cylindre circulaire de rayon* $r$.

*On demande de déterminer l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de cette sphère. On montrera qu'elle se compose de deux courbes distinctes* S, S' *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *La sphère mobile a constamment un contact du second ordre avec les courbes* S, S';

2° *Les tangentes aux courbes* S, S' *aux points* M, M' *qui correspondent à un point* $\mu$ *de* $\Sigma$ *sont perpendiculaires à la tangente en* $\mu$ *à* $\Sigma$, *et, respectivement aussi, aux droites* M$\mu$, M'$\mu$ :

3° *La sphère de rayon* R *dont le centre décrit l'une ou l'autre des courbes* S, S′ *a un contact du second ordre avec la courbe* Σ.

*Cas particulier où le rayon* R *de la sphère mobile est celui de la sphère osculatrice à l'hélice.*

SOLUTION.

L'hélice étant définie par

$$(1) \qquad \xi = r\cos v, \qquad \eta = r\sin v, \qquad \zeta = krv,$$

l'arête de rebroussement de la sphère sera donnée par

$$\begin{aligned}
&(2) \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = R^2,\\
&(3) \quad (x-\xi)\,d\xi + (y-\eta)\,d\eta + (z-\zeta)\,d\zeta = 0,\\
&(4) \quad (x-\xi)\,d^2\xi + (y-\eta)\,d^2\eta + (z-\zeta)\,d^2\zeta = d\sigma^2;
\end{aligned}$$

et posant

$$R_1 = \pm\sqrt{\frac{R^2 - r^2(1+k^2)^2}{1+k^2}},$$

on en tire

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \phantom{-}kR_1\sin v - k^2 r\cos v,\\ y = -kR_1\cos v - k^2 r\sin v,\\ z = \phantom{-k}R_1 + krv,\end{cases}$$

équations qui, par une rotation des axes autour de $Oz$, se ramènent à la forme (1). L'arête de rebroussement se compose donc de deux hélices circulaires S, S′.

On voit immédiatement que, dans le cas particulier où R est le rayon de la sphère osculatrice à Σ, soit

$$R = r(1+k^2), \qquad R_1 = 0,$$

et les deux courbes S, S′ se confondent avec le lieu du centre de courbure de l'hélice Σ.

Les points M, M′ répondant sur S et S′ à un point μ de $\Sigma$ sont, d'après (3), (4), sur la droite polaire de $\mu$ : ces deux points sont donc sur la droite polaire, à des distances égales du centre de courbure.

Les propriétés énoncées concernant les courbes S, S′ se vérifient immédiatement à l'aide de (1) et de (5). Elles sont d'ailleurs générales et subsistent quelle que soit la courbe $\Sigma$.

Ainsi, les équations (2), (3), (4) expriment que la sphère de centre $M(x, y, z)$ a un contact du second ordre avec la courbe $\Sigma$ au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$.

En différentiant complètement (3) et tenant compte de (4), on a

$$dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0, \tag{6}$$

d'où résulte la perpendicularité des tangentes en $\mu$ et en M ou M′.

De même, différentiant (2), et tenant compte de (3), on a

$$(x-\xi)\, dx + (y-\eta)\, dy + (z-\zeta)\, dz = 0, \tag{7}$$

d'où résulte la perpendicularité de $M\mu$ et des tangentes en M ou M′.

Ces deux théorèmes s'établissent d'ailleurs géométriquement en remarquant que les courbes S, S′ sont décrites sur la surface polaire de $\Sigma$, et que la distance $\mu M$ est invariable.

Enfin, l'ordre de contact de la sphère mobile et de l'arête de rebroussement résulte d'un théorème général.

Dans le cas actuel, si l'on différentie (7) en tenant compte de (6), on a

$$(x-\xi)\, d^2x + (y-\eta)\, d^2y + (z-\zeta)\, d^2z + ds^2 = 0,$$

équation qui, jointe à (7) et à (2), exprime précisément que la sphère a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de sa surface enveloppe.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer* $\int \frac{dx}{1+x^4}$; 2° *en déduire* $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; 3° *calculer cette intégrale définie par la méthode de Cauchy.*

### Certificat de Mécanique.

*Un tore homogène a son centre* O *fixe. Son axe, qui lui est invariablement lié, est un tube à section infiniment petite, dont on néglige la masse, et dans lequel peut glisser sans frottement un point matériel pesant* M. *Le tube est assujetti à glisser sans frottement entre deux cercles horizontaux fixes infiniment voisins dont le centre commun est sur la verticale du point de suspension du tore, au-dessus de ce point. On demande le mouvement du système, et plus particulièrement le mouvement relatif du point* M *dans le tube.*

Données. — *On désignera par* A *et* C *les moments d'inertie du tore par rapport à un diamètre de son équateur et par rapport à son axe et par* $m$ *la masse du point* M. *On supposera, au début, le point placé dans le tube, sans vitesse relative, à une distance* $r_0$ *du point* O *telle que l'on ait*

$$mr_0^2 = A,$$

*le tore ayant un mouvement initial quelconque compatible avec les liaisons.*

### Esquisse d'une solution de l'épreuve écrite de Mécanique.

On prendra pour origine le point O, pour axe fixe des $r$ la verticale O$r$, en sens inverse de la pesanteur, pour axe mobile $Or$ la direction de l'axe du tube qui fait un angle aigu avec $Or$. En appelant $p$, $q$, $r$ les composantes de la rotation du tore par rapport aux axes mobiles, $\theta$, $\varphi$ et $\psi$ les angles d'Euler, $\varphi'$ et $\psi'$ les dérivées de $\varphi$ et $\psi$ par rapport au temps ($\theta$ est constant et aigu), $r$ la coordonnée de M, $r'$ sa dérivée, l'extrémité C du vecteur qui représente le moment résultant des quantités de mouvement de tout le système par rapport à O aura pour coordonnées par rapport aux axes mobiles

$$(A + mr^2)p, \quad (A + mr^2)q, \quad Cr,$$

et l'on a

$$p = \sin\varphi \sin\theta\psi', \qquad q = \cos\varphi \sin\theta\psi', \qquad r = \varphi' + \cos\theta\psi'.$$

Toutes les forces, la réaction du cercle comprise, ont des moments nuls par rapport à $Or$ et $Or_1$ ; on aura donc deux intégrales premières en écrivant que la vitesse absolue de C est perpendiculaire à $Or$ et à $Or_1$.

On trouve ainsi

$$(1) \qquad r = r_0,$$

$$(2) \qquad (A + mr^2)\sin^2\theta\psi' = k,$$

$r_0$ et $k$ étant des constantes. On pourrait trouver ces deux intégrales en écrivant les équations analogues aux équations d'Euler : la troisième fournirait l'intégrale (1); l'élimination de la réaction du cercle sur le tube entre les deux premières donnerait (2).

L'équation des forces vives fournit une troisième intégrale que l'on pourrait du reste déduire de l'équation du mouvement relatif de M, la loi de rotation du tube en fonction de $r$ étant connue.

L intégrale des forces vives peut s'écrire

$$(A + mr^2)(p^2 + q^2) + mr'^2 = -2mgr\cos\theta + h,$$

$h$ étant une troisième constante. Cette équation se ramène à la suivante :

$$(3) \quad mr'^2 = \frac{(-2mgr\cos\theta + h)(A + mr^2) - k^2\sin^2\theta}{A + mr^2}.$$

On a une quadrature hyperelliptique en général, mais la discussion du mouvement dépend seulement d'un polynome du troisième degré

$$f(r) = (-2mgr\cos\theta + h)(A + mr^2) - k^2\sin^2\theta.$$

(1) et (2) donneront du reste $\varphi$ et $\psi$ par de nouvelles quadratures.

Dans le cas particulier indiqué, si l'on appelle $\omega$ la valeur initiale de $\psi'$, on peut écrire

$$f(r) = 2m(r_0 - r)A\varphi(r),$$

avec

$$\varphi(r) = g\cos\theta\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right) - \omega^2\sin^2\theta(r + r_0).$$

Si $r_0 > 0$ et

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 < 0,$$

$r$ variera entre $r_0$ et $r_1 > r_0$.

Si $r_0 > 0$,

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 > 0;$$

deux cas peuvent se présenter : Si $\varphi(r)$ a ses racines réelles, elles sont comprises entre 0 et $r_0$, et $r$ variera entre $r_0$ et la plus grande des deux. Si les racines sont imaginaires, $r$ variera indéfiniment à partir de $r_0$, autant du moins que le lui permettra la longueur du tube.

Si $r_0 > 0$,

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 = 0,$$

$M_0$ est une position d'équilibre relatif, $r$, $\varphi'$ et $\psi'$ sont constants.

Si $r_0 < 0$, le point descend à partir de $M_0$ tant que le lui permet la longueur du tube. Du reste, si le point quitte le tube, il décrira une parabole déterminée par sa vitesse au moment de la sortie et le tore tournera de façon que $\varphi'$ et $\psi'$ demeurent constants.

Dans le cas général, il est facile de montrer que les données initiales peuvent être choisies de façon que $f(r)$ aient trois racines données $r_1$, $r_2$, $r_3$, sous les conditions et restrictions suivantes :

On devra d'abord avoir

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{A}{m}.$$

Si elles sont toutes les trois réelles, une seule peut être négative et elle doit être inférieure en valeur absolue aux deux autres. Deux peuvent devenir égales à condition d'être plus grandes que o et supérieures en valeur absolue à la troisième si elle est négative. Enfin elles peuvent devenir égales toutes les trois à condition d'être positives.

Si une seule racine est réelle, elle peut être positive ou négative, mais la partie réelle des racines imaginaires doit être plus grande que o. La discussion du mouvement se ferait du reste bien simplement dans chaque cas.

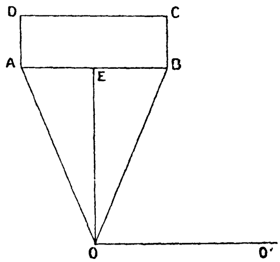
Enfin, on peut remarquer qu'il eût été commode de se servir des équations de Lagrange relatives aux variables $\varphi$ et $\psi$ et de l'équation des forces vives.

### Épreuve pratique de Mécanique.

*Une roue en fer homogène a pour méridien un triangle isoscèle* OAB *surmonté d'un rectangle* ABCD, *et la hauteur* OE *du triangle* OAB *est perpendiculaire à l'axe* OO′ *de la roue. On a*

$$OE = 1^m, \qquad AB = 0^m,50, \qquad AD = 0^m,20.$$

*Le poids spécifique du fer dont est faite la roue est 7,7. On prendra de plus* $g = 9^m,8$ *et* $\pi = 3,1416$.




1° *On demande le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe.*

2° *L'axe de la roue étant horizontal et fixe, un cordon qui s'enroule sur la roue porte à son extrémité un poids de* $50^{kg}$. *Le cordon est vertical et la roue est animée à un instant donné d'une vitesse de trente tours à la minute qui tend à soulever le poids. On demande à quelle hauteur il s'élèvera si l'on abandonne le système à lui-même. On néglige les résistances passives et le poids du cordon que l'on suppose tendu à l'instant considéré.*