Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 48-52
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__48_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1711.

(1896, p. 102.)

Quand on déroule une épicycloïde sur la tangente au sommet, le lieu des extrémités du rayon de courbure est une conique. (Riccati) (1).

SOLUTION

Par M. Audibert.

Désignons par θ l'angle variable que fait avec l'axe des X le rayon vecteur allant du centre du cercle fixe, pris pour origine, au point de contact des deux cercles, par ρ, r et nr les rayons de courbure du cercle roulant et du cercle fixe. L'épicycloïde sera représentée, à l'aide de la variable auxiliaire θ, par les deux équations

$$y = nr\sin\theta - 2r\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+2}{2}\theta,$$

$$x = nr\cos\theta + 2r\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}\theta.$$

(1) *Voir* t. XV, p. 245; il semble que c'est par erreur que la question a été attribuée à Riccati.

On en déduit

$$dy = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}d\theta,$$

$$dx = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+2}{2}d\theta,$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2(n+1)^2(n+2)r^2\sin^2\frac{n\theta}{2}\overline{d\theta}^3,$$

$$dS = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}d\theta,$$

$$S = \int_0^\theta dS = 4\frac{n+1}{n}r\left(1-\cos\frac{n\theta}{2}\right) = Y,$$

$$\rho = \frac{\overline{dS}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = 4\frac{n+1}{n+2}r\sin\frac{n\theta}{2} = X;$$

d'où, en éliminant $\frac{n\theta}{2}$, l'équation

$$(n+2)^2X^2 + n^2Y^2 - 8n(n+1)rY = 0,$$

qui représente une ellipse.

En faisant $n = \infty$, on a le cas particulier de la cycloïde; le lieu est alors le cercle

$$X^2 + Y^2 - 8rY = 0.$$

M. Barisien fait remarquer que la question énoncée est tout à fait générale et s'applique au déroulement de l'épicycloïde sur la tangente en un point quelconque I de la courbe.

On voit de plus que toutes les ellipses obtenues sont égales.

Question 1712.

(1896, p. 103.)

On considère une série d'hyperboles équilatères homothétiques par rapport à leur centre commun O, *et dont l'axe transverse commun est* OX. *Dans chacune d'elles, on trace un rayon* OM *qui détache un secteur d'aire donnée à partir de* OX. *Trouver le lieu du point* M.

(C.-A. Laisant).

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient $xy = a^2$, ou $\rho^2 \sin\theta\cos\theta = a^2$, l'équation d'une des hyperboles, K^2 le double de l'aire donnée, on aura

$$K^2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \rho^2\, d\theta = a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = a^2\, \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Éliminant a^2 et passant aux coordonnées rectangulaires, l'équation du lieu s'écrira

$$(1) \qquad xy\, \mathrm{L}\frac{y}{x} = K^2;$$

elle représente une courbe dont le centre est à l'origine et qui n'existe que dans la région du plan où y et x sont de même signe et satisfont à l'inégalité $y > x$ en valeur absolue.

Le lieu consiste donc en deux branches situées dans les deux angles opposés formés par l'axe des y et la bissectrice $y = x$. Chacune de ces droites est asymptote. En différentiant (1), on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\,\frac{\mathrm{L}\frac{y}{x} - 1}{\mathrm{L}\frac{y}{x} + 1}.$$

La droite $y = ex$ coupe chaque branche au point

$$y = \pm k\sqrt{e},\; x = \pm\frac{k}{\sqrt{e}},$$

où la tangente est parallèle à la ligne des abscisses. La dérivée seconde de y .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{x^2}\,\frac{2\mathrm{L}\frac{y}{x}\left(\mathrm{L}\frac{y}{x}\right)^2 + 1}{\left(\mathrm{L}\frac{y}{x} + 1\right)^3},$$

ne pouvant s'annuler ni devenir infinie à aucun point réel à distance finie, la courbe n'a pas de points d'inflexion; elle a l'aspect d'une sorte d'hyperbole déformée située dans le même angle, ayant les mêmes asymptotes, mais dissymétrique par rapport à la bissectrice et infléchie vers l'axe des y.

Question 1714.

(1896, p. 103.)

Étant donnés, dans un plan, quatre couples de points (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *tels qu'aucun des quadrilatères analogues au quadrilatère* AA_1BB_1 *ne soit inscriptible, prouver qu'il existe, dans ce plan, deux couples de points* (X, Y) *tels que chacun des quatre quadrilatères analogues au quadrilatère* AA_1XY *soit inscriptible.*

(X. Antomari).

SOLUTION

Par M. E. Duporcq.

Soient Ω_b, Ω_c et Ω_d trois cercles passant respectivement par les couples de points (B, B_1), (C, C_1) et (D, D_1) et admettant deux à deux un même axe radical bcd qui coupe aux points b, c et d les droites BB_1, CC_1 et DD_1. Le point b est commun aux axes radicaux du cercle Ω_d et de tous les cercles passant par les points B et B_1; l'un quelconque des cercles qui passent par les points C et C_1, et le cercle Ω_d ont de même un axe radical passant par le point c. A tout point b de la droite BB_1 correspond ainsi un cercle Ω_d et, par suite, un point c de CC_1, et inversement; les points b et c déterminent donc sur les droites BB_1 et CC_1 deux divisions homographiques : l'enveloppe de la droite bc est donc une conique (α), inscrite au triangle formé par les droites BB_1, CC_1 et DD_1. (Si, contrairement à l'hypothèse, le quadrilatère BB_1CC_1, par exemple, avait été inscriptible, cette enveloppe se serait réduite au point de concours des droites BB_1 et CC_1.)

Considérons la conique (β) qui correspond de même aux couples (C, C_1), (D, D_1) et (A, A_1); elle admet avec (α) deux tangentes communes autres que les droites CC_1 et DD_1, et l'on voit que l'on peut déterminer quatre circonférences passant respectivement par l'un des quatre couples considérés, et admettant deux à deux pour axe radical l'une de ces tangentes communes. Sur chacune de ces deux droites existe donc un couple de points (X, Y) répondant aux conditions de l'énoncé.

On peut remarquer que si les perpendiculaires aux milieux des segments AA_1, BB_1, CC_1 et DD_1 sont concourantes (et dans ce cas seulement), les quatre coniques (α), (β), (γ) et (δ) deviennent des paraboles, et l'on n'obtient alors qu'un couple (X, Y) à distance finie : l'autre correspond aux cercles concentriques.