

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 482-484

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__482_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1764.

(1897, p. 196.)

Soit $f(x) = 0$ une équation réciproque de degré $2m$, n'ayant pas de racine commune avec $x^2 - 1 = 0$.

Si l'on pose $x = \frac{\sqrt{y} - 1}{\sqrt{y} + 1}$, l'équation en y est de degré m , et le produit de ses racines est égal à $(-1)^m \frac{f(-1)}{f(1)}$.

Si l'on pose $x + \frac{1}{x} = 2i$, le produit des racines de l'équation transformée est égal à

$$\frac{(-1)^m \frac{m\pi i}{2}}{2^m} \cdot \frac{f(\sqrt{-1})}{f(0)}.$$

Application à l'équation binôme. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. E. TARATTE.

De la relation $x = \frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{y} - 1}$, on tire

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{(x-1)\left(\frac{1}{x} - 1\right)},$$

ou, en mettant des indices aux lettres,

$$x_p = (-1) \frac{(x_p + 1) \left(\frac{1}{x_p} + 1 \right)}{(x_p - 1) \left(\frac{1}{x_p} - 1 \right)}.$$

En donnant à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m dans cette formule, on obtiendra m équations qui, étant multipliées entre elles membre à membre, donneront

$$\begin{aligned} & y_1 y_2 y_3 \dots y_m \\ = & (-1)^m \frac{(x_1 + 1) \left(\frac{1}{x_1} + 1 \right) (x_2 + 1) \left(\frac{1}{x_2} + 1 \right) \dots (x_m + 1) \left(\frac{1}{x_m} + 1 \right)}{(x_1 - 1) \left(\frac{1}{x_1} - 1 \right) (x_2 - 1) \left(\frac{1}{x_2} - 1 \right) \dots (x_m - 1) \left(\frac{1}{x_m} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Le numérateur du second membre est, à un facteur constant près, le produit des racines de la transformée $f(x-1) = 0$, c'est-à-dire qu'il est égal à $\frac{f(-1)}{f(0)}$; le dénominateur est de même le produit des racines de la transformée $f(x+1) = 0$: il est donc égal à $\frac{f(1)}{f(0)}$, car $f(0)$ est égal au coefficient de x^{2m} puisque l'équation $f(x) = 0$ est réciproque; on aura donc

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_m = (-1)^m \frac{f(-1)}{f(1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Deuxièmement, la relation $x + \frac{1}{x} = 2z$ peut s'écrire

$$2z = (i)(x - i) \left(\frac{1}{x} - i \right),$$

d'où, avec des indices,

$$2z_p = (i)(x_p - i) \left(\frac{1}{x_p} - i \right),$$

et

$$z_p = \frac{(i)}{2} (x_p - i) \left(\frac{1}{x_p} - i \right);$$

en donnant, dans cette dernière formule, à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m , et multipliant membre à membre les équations

ainsi obtenues, il viendra

$$\begin{aligned} & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \dots \bar{z}_m \\ &= \frac{(i)^m}{2^m} (x_1 - i) \left(\frac{1}{x_1} - i \right) (x_2 - i) \left(\frac{1}{x_2} - i \right) \dots (x_m - i) \left(\frac{1}{x_m} - i \right), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, d'après ce qui précède,

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \dots \bar{z}_m = \frac{(i)^m}{2^m} \frac{f(i)}{f(0)};$$

mais

$$i = (-1)(-i) = (-1)e^{-\frac{\pi i}{2}}, \quad (i)^m = (-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}},$$

et, par suite,

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \dots \bar{z}_m = \frac{(-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}}}{2^m} \frac{f(i)}{f(0)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Application à l'équation binôme. — Une équation binôme du degré $2m$, n'ayant aucune racine commune avec $x^2 - 1 = 0$, est nécessairement de la forme $x^{2m} + 1 = 0$, m étant pair.

1^{er} cas :

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_m = (-1)^m \frac{2}{2} = 1.$$

2^e cas :

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \dots \bar{z}_m = \frac{(-1)^m \left(\cos -\frac{m\pi}{2} + i \sin \frac{m\pi}{2} \right)}{2^m} \frac{2}{1} = \pm \frac{1}{2^{m-1}},$$

+ ou - selon que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.