Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 482-484

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__482_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1764.

(1897, p. 196.)

Soit $f(x)=0$ *une équation réciproque de degré* $2m$, *n'ayant pas de racine commune avec* $x^4-1=0$.

Si l'on pose $x=\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}-1}$, *l'équation en* y *est de degré* m, *et le produit de ses racines est égal à* $(-1)^m\dfrac{f(-1)}{f(1)}$.

Si l'on pose $x+\dfrac{1}{x}=2i$, *le produit des racines de l'équation transformée est égal à*

$$\frac{(-1)^{m-\frac{m\pi i}{2}}}{2^m}\cdot\frac{f(\sqrt{-1})}{f(0)}.$$

Application à l'équation binome. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. E. Taratte.

De la relation $x=\dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}$, on tire

$$y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right)}{(x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right)},$$

ou, en mettant des indices aux lettres,

$$x_p = (-1)\,\frac{(x_p+1)\left(\dfrac{1}{x_p}+1\right)}{(x_p-1)\left(\dfrac{1}{x_p}+1\right)}.$$

En donnant à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m dans cette formule, on obtiendra m équations qui, étant multipliées entre elles membre à membre, donneront

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m = (-1)^m\,\frac{(x_1+1)\left(\dfrac{1}{x_1}+1\right)(x_2+1)\left(\dfrac{1}{x_2}+1\right)\ldots(x_m+1)\left(\dfrac{1}{x_m}+1\right)}{(x_1-1)\left(\dfrac{1}{x_1}-1\right)(x_2-1)\left(\dfrac{1}{x_2}-1\right)\ldots(x_m-1)\left(\dfrac{1}{x_m}-1\right)}.$$

Le numérateur du second membre est, à un facteur constant près, le produit des racines de la transformée $f(x-1)=0$, c'est-à-dire qu'il est égal à $\dfrac{f(-1)}{f(0)}$; le dénominateur est de même le produit des racines de la transformée $f(x+1)=0$: il est donc égal à $\dfrac{f(1)}{f(0)}$, car $f(0)$ est égal au coefficient de x^{2m} puisque l'équation $f(x)=0$ est réciproque; on aura donc

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m = (-1)^m\,\frac{f(-1)}{f(1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Deuxièmement, la relation $x + \dfrac{1}{x} = 2z$ peut s'écrire

$$2z = (i)(x-i)\left(\frac{1}{x}-i\right),$$

d'où, avec des indices,

$$2z_p = (i)(x_p - i)\left(\frac{1}{x_p}-i\right),$$

et

$$z_p = \frac{(i)}{2}(x_p - i)\left(\frac{1}{x_p}-i\right);$$

en donnant, dans cette dernière formule, à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m, et multipliant membre à membre les équations ainsi obtenues, il viendra

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m$$
$$= \frac{(i)^m}{2^m}(x_1 - i)\left(\frac{1}{x_1} - i\right)(x_2 - i)\left(\frac{1}{x_2} - i\right)\ldots(x_m - i)\left(\frac{1}{x_m} - i\right),$$

ce qui peut s'écrire, d'après ce qui précède,

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(i)^m}{2^m}\frac{f(i)}{f(0)};$$

mais

$$i = (-1)(-i) = (-1)e^{-\frac{\pi i}{2}}, \qquad (i)^m = (-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}},$$

et, par suite,

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}}}{2^m}\frac{f(i)}{f(0)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Application à l'équation binome. — Une équation binome du degré $2m$, n'ayant aucune racine commune avec $x^4 - 1 = 0$, est nécessairement de la forme $x^{2m} + 1 = 0$, m étant pair.

1er cas :

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m = (-1)^m \frac{2}{2} = 1.$$

2e cas :

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(-1)^m\left(\cos - \frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2}\right)}{2^m}\frac{2}{1} = \pm\frac{1}{2^{m-1}},$$

$+$ ou $-$ selon que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.