S. MANGEOT

Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface d'ordre quelconque soit de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 408-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__408_1>

[O6ad]

DES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UNE SURFACE D'ORDRE QUELCONQUE SOIT DE RÉVOLUTION;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Je suppose que l'on veuille avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface S, autre qu'un système de plans parallèles ou de sphères concentriques, représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation entière de degré m et à coefficients réels

$$f(x, y, z) = f_m(x, y, z) + f_{m-1}(x, y, z) + \ldots + f_0(x, y, z) = 0,$$

où $f_n(x, y, z)$ désigne le groupe des termes de degré n, soit une surface de révolution, et, quand ces conditions sont remplies, connaître la position de l'axe de révolution de la surface.

J'ai déjà donné une solution de ce problème ([1]). Je vais en donner ici une autre solution, qui m'a été fournie par la comparaison du polynome $f(x, y, z)$ avec la fonction entière (de même degré) du premier membre de l'équation d'un plan et du premier membre de l'équation d'une sphère.

Je puis admettre que le premier groupe $f_m(x, y, z)$ du polynome $f(x, y, z)$ n'est pas une puissance d'une forme linéaire P, puisqu'alors si le premier, f_h, des groupes suivants qui n'est pas, à un facteur constant près, une puissance de P, était une puissance d'une autre forme linéaire, la surface S ne pourrait pas être de révolution, et, dans le cas contraire, cette surface serait de révolution en même temps et autour de la même droite (droite normale au plan $P = 0$) que la surface représentée par l'équation

$$f_h + f_{h-1} + \ldots + f_0 = 0.$$

Je réserve, pour le traiter plus loin, le cas où $f_m(x, y, z)$ serait, à un facteur constant près, une puissance de $x^2 + y^2 + z^2$.

Soient $\varphi(y, z) + x\varphi_1(y, z)$, $\psi(z, x) + y\psi_1(z, x)$, $\chi(x, y) + z\chi_1(x, y)$ les sommes formées par les deux premiers termes du polynome homogène $f_m(x, y, z)$ ordonné suivant les puissances croissantes de x, puis de y, puis de z. Si deux des trois formes $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$ sont identiques ([2]), la surface S n'est

---

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, mai 1897.

([2]) J'entends, partout, le mot *identique* dans le sens de *identique à zéro*.

pas de révolution; et si une seule est identique, par exemple la première, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à l'axe des x. Je suppose qu'aucune de ces trois formes ne soit identique.

1° Lorsque deux des trois formes $\varphi_1(y, z)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$ sont identiques, la surface n'est pas de révolution quand m est impair, et, quand m est pair, il faut, pour qu'elle soit de révolution, que la troisième forme soit identique aussi, et que l'une des trois fonctions $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$, et une seule, la première par exemple, soit, à un facteur constant près, une puissance de la somme des carrés des deux variables qu'elle renferme : alors on peut affirmer que, si la surface est de révolution, son axe est parallèle à l'axe des x.

2° Quand deux des trois formes $\varphi_1(y, z)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$ ne sont pas identiques, soient $\varphi_1(y, z)$ l'une de celles qui ne le sont pas; $\varphi_1^{(p)}(1, t)$ la première des fonctions de t

$$\varphi_1^{(0)}(1, t) = \varphi_1(1, t), \qquad \varphi_1'(1, t), \qquad \varphi_1''(1, t), \qquad \varphi_1'''(1, t), \qquad \ldots$$

qui ne s'annule pas pour la valeur $t = i$, et $\varphi^{(q)}(1, t)$ la première des fonctions

$$\varphi^{(0)}(1, t) = \varphi(1, t), \qquad \varphi'(1, t), \qquad \varphi''(1, t), \qquad \varphi'''(1, t), \qquad \ldots$$

qui ne s'annule pas pour cette même valeur $t = i$. Si l'on a $p \gtrless q$, la surface n'est pas de révolution. Si $p = q$, on peut affirmer que la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la droite réelle du plan imaginaire

$$y - iz = (m - 2p)\frac{\varphi^{(p)}(1, i)}{\varphi_1^{(p)}(1, i)}\,x,$$

droite qui n'est pas confondue avec l'un des axes de coordonnées.

Ainsi les six fonctions $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$,

$\varphi_1(y, z)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$, traitées comme je viens de le dire, conduiront, soit à conclure que la surface S ne peut pas être de révolution, soit à la connaissance d'une direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ telle que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à cette direction.

Dans ce dernier cas, et supposant, afin de fixer les idées, α différent de zéro (soit $\alpha = 1$), pour que la surface S soit de révolution il faudra et il suffira :

1° Qu'aucune des deux formes $\chi(x; y)$, $\psi(z, x)$ ne soit identique et que les exposants k et k' des plus hautes puissances de $\alpha x + \beta y$ et de $\alpha x + \gamma z$ (formes linéaires connues) qui entrent respectivement en facteur dans ces deux formes soient égaux et de la même parité que m, en étant inférieurs à m;

2° Que, si k n'est pas nul, en appelant $2m'$ le plus grand nombre pair contenu dans m et posant

$$\rho_{n+1}(x, y) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{m'-n}\rho_n(x, y) - (x^2 + y^2)^{m'-n}\rho_n(\beta, -\alpha)}{(\alpha^2 - \beta^2)^{m'-n}(\alpha x + \beta y)^2},$$

$$\omega_{n+1}(x, z) = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)^{m-n}\omega_n(x, z) - (x^2 + z^2)^{m'-n}\omega_n(\gamma, -\alpha)}{(\alpha^2 - \gamma^2)^{m-n}(\alpha x + \gamma z)^2},$$

les fonctions définies, quand k est pair, par les symboles

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 = \dfrac{f_{m-1}(x, y, 0)}{\alpha x + \beta y}, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad \rho_{\frac{k}{2}}, \\ \omega_1 = \dfrac{f_{m-1}(x, 0, z)}{\alpha x + \gamma z}, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_{\frac{k}{2}}, \end{array}\right.$$

et, quand k est impair, par les symboles

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_0 = f_{m-1}(x, y, 0), \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_{\frac{k-1}{2}}, \\ \omega_0 = f_{m-1}(x, 0, z), \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{\frac{k-1}{2}}, \end{array}\right.$$

soient des polynomes entiers (1);

---

(1) Chacun des symboles ρ_1, ρ_2, ..., ω_1, ω_2, ... a deux significations différentes suivant que k est pair ou impair.

3° Que, si l'on représente par $U(x, y)$, $V(x, z)$ les deux polynomes entiers $(\alpha x + \beta y)\rho_{\frac{k}{2}+1}$, $(\alpha x + \gamma z)\omega_{\frac{k}{2}+1}$, quand k est pair ou nul, et ceux-ci $(\alpha x + \beta y)\rho_{\frac{k+1}{2}}$, $(\alpha x + \gamma z)\omega_{\frac{k+1}{2}}$, quand k est impair, et par $\chi_0(x, y)$, $\psi_0(x, z)$ les deux polynomes entiers

$$\frac{\chi(x, y)}{(\alpha x + \beta y)^k}, \quad \frac{\psi(z, x)}{(\alpha x + \gamma z)^{k'}},$$

les coefficients des termes de la fonction entière

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} x - x' & y - y' & z - z' \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

où l'on fait

$$x' = 0, \qquad y' = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)U(\beta, -\alpha)}{\alpha(m - k)\chi_0(\beta, -\alpha)},$$

$$z' = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)V(\gamma, -\alpha)}{\alpha(m - k)\psi_0(\gamma, -\alpha)},$$

soient tous nuls [1].

L'axe de révolution de la surface S sera la droite définie par les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma} \quad [2].$$

Quand la surface S est d'ordre pair, on peut, en con-

---

[1] Les nombres k, k', $\chi_0(\beta, -\alpha)$, $\psi_0(\gamma, -\alpha)$, dont les deux derniers sont différents de zéro, peuvent être obtenus sans effectuer de divisions, par l'emploi des dérivées relatives à x de chacune des formes $\chi(x, y)$, $\psi(z, x)$.

[2] Pour que le cône $f_m(x, y, z) = 0$ soit une surface de révolution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha\left(y\frac{\partial f_m}{\partial z} - z\frac{\partial f_m}{\partial y}\right) + \beta\left(z\frac{\partial f_m}{\partial x} - x\frac{\partial f_m}{\partial z}\right) + \gamma\left(x\frac{\partial f_m}{\partial y} - y\frac{\partial f_m}{\partial x}\right) \equiv 0,$$

α, β, γ étant déterminés comme il a été dit : son axe est la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

séquence de ce qui précède, formuler cette proposition :

Lorsque, *ce qui est le cas général,* la constante $\varphi(1, i)\,\varphi_1(1, i)$ n'est pas nulle, et que, en représentant les deux quantités réelles

$$\frac{m}{2}\left[\frac{\varphi(1, i)}{\varphi_1(1, i)} + \frac{\varphi(1, -i)}{\varphi_1(1, -i)}\right], \qquad \frac{m}{2i}\left[\frac{\varphi(1, i)}{\varphi_1(1, i)} - \frac{\varphi(1, -i)}{\varphi_1(1, -i)}\right],$$

par A et B, les deux constantes $\chi(A, -1)$, $\psi(-1, B)$ sont elles-mêmes différentes de zéro, si l'on pose

$$C = \frac{(A^2+1) f_{m-1}(A, -1, 0)}{m\,\chi(A, -1)},$$
$$D = \frac{(B^2+1) f_{m-1}(B, 0, -1)}{m\,\psi(-1, B)},$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface S soit de révolution, m étant pair, sont que les coefficients de tous les termes du polynome entier

$$\begin{vmatrix} x & y - C & z - D \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ 1 & A & B \end{vmatrix}$$

soient nuls, et les équations de l'axe de révolution sont

$$y - C = Ax, \qquad z - D = Bx.$$

Cas où le groupe $f_m(x, y, z)$ est de la forme $a(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m}{2}}$. — Soient, en conservant les notations précédentes, $\varphi(y, z) + x\varphi_1(y, z)$, $\psi(z, x) + y\psi_1(z, x)$, $\chi(x, y) + z\chi_1(x, y)$ les sommes formées par les deux premiers termes du second groupe homogène,

$$f_{m-1}(x, y, z),$$

ordonné suivant les puissances croissantes de x, puis de y, puis de z. Je suppose d'abord que l'on n'ait pas à la fois

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(y,z) = \lambda(y^2+z^2)^{\frac{m}{2}-1}, \\ \psi_1(z,x) = \mu(z^2+x^2)^{\frac{m}{2}-1}, \\ \chi_1(x,y) = \nu(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}-1}, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant des constantes qui peuvent être nulles. J'admets, par exemple, que $\varphi_1(y,z)$ n'est pas de la forme $\lambda(y^2+z^2)^{\frac{m}{2}-1}$. En définissant la dérivée d'ordre o d'une fonction comme étant cette fonction elle-même, soit p l'ordre de la première des dérivées de la fonction non identique $\varphi_1(1,t)$ qui ne s'annule pas pour $t=i$. Si le polynome $\varphi(1,t)$ est identique, ou si la première de ses dérivées qui ne s'annule pas pour $t=i$ (y compris celle d'ordre o) est d'ordre différent de p, la surface S n'est pas de révolution. Dans l'hypothèse contraire, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la droite réelle $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ $(\alpha = 1)$ du plan imaginaire

$$y + iz = (m-2p-1)\frac{\varphi^{(p)}(1,i)}{\varphi_1^{(p)}(1,i)}x,$$

droite qui ne coïncide pas avec un axe de coordonnées. Pour qu'elle soit d'ailleurs de révolution, il faut et il suffit que le polynome $F(x,y,z)$ soit identiquement nul quand on y fait

$$x' = 0,\qquad y' = \frac{f_{m-1}(\beta,-\alpha,0)}{m\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{m}{2}-1}},\qquad z' = \frac{f_{m-1}(\gamma,0,-\alpha)}{m\alpha(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{m}{2}-1}},$$

et les équations de l'axe sont $\frac{x}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma}$, avec ces valeurs de y' et z'.

Je me place maintenant dans l'hypothèse où les trois identités (1) auraient lieu [1]. Ici la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$: c'est là un premier résultat. Je considère alors les trois formes

$$\varphi(y, z) - (\mu y - \nu z)(y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

$$\psi(z, x) - (\nu z + \lambda x)(z^2 + x^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

$$\chi(x, y) - (\lambda x + \mu y)(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Si aucune d'elles n'est identique, ou que deux d'entre elles soient identiques, et deux seulement, la surface n'est pas de révolution. Quand une seule est identique, par exemple la première, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à l'axe des x, la droite $may + \mu = 0$, $maz + \nu = 0$; et la condition pour qu'elle soit de révolution est

$$(may - \mu)f'_z = (maz - \nu)f'_y.$$

Lorsque les trois formes sont identiques, je puis, pour l'objet que j'ai en vue, substituer au polynome donné $f(x, y, z)$, le polynome suivant

$$f_{(1)}(x, y, z) = f(x, y, z) - a\left[\left(x + \frac{\lambda}{ma}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{ma}\right)^2 + \left(z + \frac{\nu}{ma}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}}.$$

En effet, dans les conditions actuelles, pour que la surface S soit de révolution, il faut et il suffit que $f_{(1)}(x, y, z)$ ait son degré m_1 inférieur à $m - 1$, et que la surface S_1 correspondant à l'équation $f_{(1)}(x, y, z) = 0$ soit elle-même de révolution autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$; et les axes de

---

[1] Si deux de ces identités sont vérifiées, la troisième doit l'être aussi pour que la surface soit de révolution.

révolution des deux surfaces S, S_1 seront confondus. Je suis alors conduit, en supposant $m_1 < m - 1$, à appliquer les méthodes précédentes à la surface S_1.

Je prends, à cet effet, dans le polynome $f_{(1)}$, les deux premiers groupes homogènes f_{m_1}, f_{m_1-1}, ceux formés par les termes de degrés m_1 et $m_1 - 1$. J'admets d'abord que ces groupes ne satisfassent pas aux conditions particulières que je suppose actuellement remplies par les deux premiers groupes f_m, f_{m-1} de f, c'est-à-dire que l'on ne soit pas placé dans le cas où, f_{m_1} ayant la forme $a_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}}$, les coefficients de x, de y, de z, dans le polynome f_{m_1-1}, auraient les formes

$$\lambda_1(y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$
$$\mu_1(z^2+x^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$
$$\nu_1(x^2+y^2)^{\frac{m_1}{2}-1}.$$

tandis que les parties indépendantes de x, de y, de z, dans ce polynome f_{m_1-1}, seraient elles-mêmes

$$(\mu_1 y + \nu_1 z)(y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$
$$(\nu_1 z + \lambda_1 x)(z^2+x^2)^{\frac{m_1}{2}-1}.$$
$$(\lambda_1 x + \mu_1 y)(x^2+y^2)^{\frac{m_1}{2}-1}.$$

Je fais alors sur $f_{(1)}$ les mêmes opérations et discussion que celles que je faisais tout à l'heure sur f, en me dispensant, dans tous les cas, des calculs analogues à ceux où j'introduisais les nombres appelés α, β, γ (1). Elles

---

(1) C'est-à-dire que : si f_{m_1} n'est pas de la forme $a_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}}$, je discute et traite f_{m_1} comme je le faisais pour f_m au cinquième alinéa de cette Note : et si f_{m_1} est de cette forme, je discute et traite

m'amèneront, soit à reconnaître que la surface S_1 n'est pas de révolution, et alors il en sera de même de S; soit à trouver une direction $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$ telle que S_1 ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à cette direction. Alors la surface S ne pourra être de révolution qu'autour de la droite

$$\frac{max + \lambda}{\alpha_1} = \frac{may + \mu}{\beta_1} = \frac{maz + \nu}{\gamma_1},$$

et le problème se trouvera résolu, les conditions pour qne cette surface soit de révolution étant que le polynome $F(x, y, z)$ soit identiquement nul quand on y remplace les lettres α, β, γ par α_1, β_1, γ_1 et x', y', z' par $-\frac{\lambda}{ma}$, $-\frac{\mu}{ma}$, $-\frac{\nu}{ma}$, et, si l'on veut aussi, f par $f_{(1)}$.

Je suppose maintenant que l'on soit placé dans le cas particulier que je viens de réserver au sujet de $f_{(1)}$. Si les trois différences

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{ma} - \frac{\lambda_1}{m_1 a_1}, \quad \beta_1 = \frac{\mu}{ma} - \frac{\mu_1}{m_1 a_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\nu}{ma} - \frac{\nu_1}{m_1 a_1}$$

ne sont pas nulles ensemble, la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$, qui est la droite

$$\frac{max + \lambda}{\alpha_1} = \frac{may + \mu}{\beta_1} = \frac{maz + \nu}{\gamma_1},$$

et la question sera encore terminée. Si ces trois différences sont nulles, je puis remplacer, à son tour, le

---

f_{m_1-1} comme je le faisais pour f_{m-1} dans les passages suivants de cette Note : dixième alinéa jusqu'aux mots *axe de coordonnées* et onzième alinéa jusqu'aux mots *l'axe des x*.

polynome $f_{(1)}(x, y, z)$ par le suivant

$$f_{(2)}(x, y, z) = f_{(1)}(x, y, z) \\ - a_1\left[\left(x + \frac{\lambda}{ma}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{ma}\right)^2 + \left(z + \frac{\nu}{ma}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}}.$$

Car, pour que S soit de révolution, il est nécessaire et suffisant que $f_{(2)}(x, y, z)$ ait son degré m_2 inférieur à $m_1 - 1$ et que la surface qui a l'équation

$$f_{(2)}(x, y, z) = 0$$

soit de révolution autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$, droite qui coïncidera avec l'axe de révolution de S. Si m_2 est plus petit que $m_1 - 1$, je ferai sur le polynome $f_{(2)}$ les opérations que j'indiquais précédemment au sujet de $f_{(1)}$.

Si les circonstances dans lesquelles j'ai remplacé $f_{(1)}$ par $f_{(2)}$ venaient encore à se produire pour le polynome $f_{(2)}$, je remplacerais à son tour $f_{(2)}$ par un polynôme $f_{(3)}$ déduit de $f_{(2)}$ comme $f_{(2)}$ était déduit de $f_{(1)}$, et ainsi de suite. En continuant de la sorte, je finirai par obtenir un polynome $f_{(r)}(x, y, z)$, qui, traité de la façon que j'indiquais tout à l'heure pour $f_{(1)}$, conduira, soit à cette conclusion que la surface S n'est pas de révolution, soit à la connaissance d'une direction $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$ telle que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite ayant cette direction, et, par conséquent, qu'autour de la droite

$$\frac{max + \lambda}{\alpha_1} = \frac{may + \mu}{\beta_1} = \frac{maz + \nu}{\gamma_1};$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit de révolution seront d'ailleurs que les coefficients des termes du polynome

$$\begin{vmatrix} max + \lambda & may + \mu & maz + \nu \\ \dfrac{\partial f_{(r)}}{\partial x} & \dfrac{\partial f_{(r)}}{\partial y} & \dfrac{\partial f_{(r)}}{\partial z} \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

soient tous nuls.

Remarque I. — Sachant que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite parallèle à une direction connue, on peut résoudre le problème proposé en rapportant la surface à trois axes de coordonnées dont l'un coïncide avec cette direction, et appliquant la proposition suivante :

Pour que, en coordonnées rectangulaires, une équation entière $\Sigma Z^n \Phi_n(X, Y) = 0$ représente une surface de révolution autour d'une parallèle à l'axe des Z, il est nécessaire et suffisant que $MX^h + NY^h + \ldots$ étant la somme des termes de degré le plus elevé, h, dans l'un des polynomes $\Phi_n(X, Y)$ pris à volonté, et

$$M_1 X^{h-1} + N_1 Y^{h-1} + \ldots$$

la somme des termes de degré $h - 1$ de ce polynome, chacune des expressions $\Phi_n\left(X + \frac{M_1}{hM}, Y + \frac{N_1}{hN}\right)$ soit une fonction de $X^2 + Y^2$; et l'axe de révolution de la surface est la droite

$$hMX + M_1 = 0, \qquad hNY + N_1 = 0.$$

Remarque II. — Sachant que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite passant par un point connu (x_0, y_0, z_0), on peut résoudre la question posée en opérant comme il suit :

On prend, à volonté, l'un des groupes homogènes dont la somme est $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, qui ne soit pas, à un facteur constant près, une puissance parfaite de $x^2+y^2+z^2$. L'équation obtenue en annulant ce groupe définit un cône qui, si la surface S est de révolution, doit être de révolution autour d'une parallèle à son axe. En traitant ce groupe comme je traitais $f_m(x, y, z)$ au cinquième alinéa de cette Note, on sera conduit, soit à conclure que le cône n'est pas de révolution, et alors il en sera de même de S; soit à trouver une droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ telle que le cône ne peut être de révolution qu'autour de cette droite (ou d'une parallèle à cette droite), et alors la surface S ne pourra être de révolution qu'autour de la droite

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma};$$

les conditions pour qu'elle soit de révolution étant d'ailleurs que $F(x, y, z)$ soit identiquement nul pour $x'=x_0$, $y'=y_0$, $z'=z_0$.

[Dans les deux cas, $f_m(x, y, z)$ peut être une puissance d'une forme linéaire.]