NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Étude sur les substitutions du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 389-404

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__389_0>

[D2]

ÉTUDE SUR LES SUBSTITUTIONS DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. H. LAURENT.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Je me propose, dans ce qui va suivre, d'étudier les propriétés des substitutions linéaires du second degré dont le déterminant est un; au fond, cette étude est identique à celle des substitutions de la forme

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Cette étude a déjà été entreprise et menée à bonne fin par M. Poincaré; mais les lignes qui suivent n'ont rien de commun avec le travail de M. Poincaré, et je me place sur un tout autre terrain que l'illustre géomètre.

Les substitutions que nous allons étudier peuvent se mettre sous la forme symbolique

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij = a\tau_{11} + b\tau_{12} + c\tau_{21} + d\tau_{22},$$

i et j désignant des substitutions de la forme

$$i = \tau_{12} + \tau_{21}, \qquad j = \tau_{11} - \tau_{22};$$

alors on aura

$$(1) \quad a = \alpha + \gamma, \qquad d = \alpha - \gamma, \qquad b = \beta - \delta, \qquad c = \beta + \delta;$$

$$(2) \quad \alpha = \frac{a+d}{2}, \qquad \gamma = \frac{a-d}{2}, \qquad \beta = \frac{b+c}{2}, \qquad \delta = \frac{c-b}{2}.$$

$$(3) \qquad i^2 = 1, \qquad j^2 = 1, \qquad ij = -ji.$$

Si l'on suppose le déterminant $ad - bc$ de la substitution égal à 1, on aura

$$\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \delta^2 = 1.$$

II. — Substitutions sans partie numérique.

Nous considérerons d'abord le cas où $\alpha = 0$: la substitution considérée est de la forme

$$v = \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = -1 :$$

dans le cas où $\alpha = 0$, nous supposerons encore que le déterminant peut être -1 ou zéro, en sorte que l'on pourra avoir

$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0 :$$

soit v' une autre substitution analogue à v

$$v' = \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on aura

$$vv' = \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\delta\gamma' - \gamma\delta') + j(\beta\delta' - \delta\beta') - ij(\gamma\beta' - \beta\gamma').$$

de sorte que si l'on pose

$$\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' = \frac{N}{2},$$

on aura

$$vv' + v'v = N, \tag{1}$$

et dans le cas où $v = v'$ on a $v^2 = \pm 1$ ou zéro en sorte que le carré de v sera égal à ± 1 ou à zéro suivant les cas.

III. — Groupe dérivé d'une seule substitution.

Nous distinguerons trois espèces de substitutions, dans le cas où α, β, γ, δ sont réels; soit

$$s = \alpha + \beta i - \gamma j + s ij.$$

1° Si $\alpha^2 < 1$, on dit que la substitution s est elliptique ; on peut la mettre sous la forme

$$\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{-\beta^2-\gamma^2+\delta^2}},$$

car, en vertu de

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 = 1,$$

les radicaux sont réels, et l'on peut poser

$$\alpha = \cos\theta, \qquad v = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{-\gamma^2-\beta^2+\delta^2}}.$$

Alors s prend la forme

$$s = \cos\theta + v\sin\theta,$$

et l'on a

$$v^2 = -1;$$

on en conclut, si m est entier,

$$s^m = \cos m\theta + v\sin m\theta.$$

2° Si $\alpha^2 > 1$, on dit que la substitution est hyperbolique, alors on écrit

$$s = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\gamma^2+\beta^2-\delta^2}},$$

et si l'on pose $\alpha = \operatorname{ch}\varphi$ ou $-\operatorname{ch}\varphi$ suivant que α est positif ou négatif, on a

$$s = \operatorname{ch}\varphi + v\operatorname{sh}\varphi \qquad \text{ou} \qquad s = -\operatorname{ch}\varphi - v\operatorname{sh}\varphi\ldots,$$

$$v^2 = +1,$$

$$(\pm s)^m = \operatorname{ch} m\varphi + v\operatorname{sh} m\varphi.$$

3° Si $\alpha^2 = 1$, on dit que la substitution est parabolique et l'on peut poser

$$s = 1 + v, \qquad v^2 = 0,$$

$$s^m = 1 + vm.$$

1° Si la substitution s est elliptique, le groupe dérivé (formé des puissances de s) est en général d'ordre infini; il contient une substitution infinitésimale

$$\cos m\theta + \nu \sin m\theta,$$

car on peut choisir m de telle sorte que $\cos m\theta$ soit aussi voisin que l'on veut de l'unité ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ donne $a = d = 1$). Cependant si θ est commensurable avec π le groupe contiendra un nombre fini de substitutions distinctes.

2° Si la substitution s est hyperbolique, s^m est de la forme $\pm(\operatorname{ch} m\theta + \nu \operatorname{sh} m\theta)$, elle n'est jamais infinitésimale, le groupe dérivé de s est discontinu. Il en est évidemment de même si s est parabolique. La forme $\cos\theta + \nu \sin\theta$ convient à toutes les substitutions si θ n'est pas réel.

IV. — Groupe dérivé de substitutions échangeables.

Soit

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$(1) \quad \begin{cases} ss' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha' + \delta\gamma' - \gamma\delta') \\ \qquad + j\,(\alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \beta\delta' - \delta\beta') \\ \qquad + ij(\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta'); \end{cases}$$

et si l'on a $ss' = s's$, il faut que

$$(2) \qquad \delta\gamma' - \gamma\delta' = \beta\delta' - \delta\beta' = \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0;$$

donc les deux substitutions seront de la forme

$$a + b\nu, \qquad a' + b'\nu,$$

a, b, a', b' désignant des nombres; car, en vertu de (2), $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\delta}{\delta'}$. Ces deux substitutions seront à la fois elliptiques, ou à la fois hyperboliques, ou à la fois paraboliques (en supposant les coefficients réels) :

1° Si elles sont elliptiques on peut poser

$$s = \cos\theta + v \sin\theta, \qquad s' = \cos\theta' + v \sin\theta';$$

alors

$$ss' = \cos(\theta + \theta') + v \sin(\theta + \theta'),$$

et plus généralement

$$s^m s'^n = \cos(m\theta + n\theta') + v \sin(m\theta + n\theta') :$$

telle est l'expression de la substitution la plus générale du groupe; elle pourra être infinitésimale pour des valeurs convenables de m et n et le groupe sera continu, à moins que θ et θ' soient commensurables avec π : le groupe dérivé de s et s' sera alors d'ordre fini. On verrait de même que le groupe dérivé d'un nombre quelconque de substitutions elliptiques échangeables est continu ou d'ordre fini.

2° Si les substitutions s et s' sont hyperboliques et toutes deux de la forme

$$\pm(\operatorname{ch}\theta + v \operatorname{sh}\theta), \qquad \pm(\operatorname{ch}\theta' + v \operatorname{sh}\theta'),$$

elles donneront lieu à un groupe d'ordre infini, discontinu si θ et θ' sont commensurables, mais continu s'il n'en est pas ainsi.

V. — Groupe dérivé de deux substitutions sans partie numérique.

Considérons deux substitutions sans partie numérique

$$v = \beta i + \gamma j + \delta ij, \qquad v' = \beta' i - \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$\begin{aligned} vv' = {} & \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\delta\gamma' - \gamma\delta') \\ & + j(\beta\delta' - \delta\beta') + ij(\beta\gamma' - \gamma\beta'); \end{aligned}$$

ce produit est tout à fait quelconque, en sorte que toute substitution est le produit de deux autres sans partie numérique (et de déterminant ± 1). En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' &= \alpha'', \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' &= \beta'', \\ \beta\delta' - \delta\beta' &= \gamma'', \\ \beta\gamma' - \gamma\beta' &= \delta'', \end{aligned}$$

α'' satisfaisant à la relation

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 - \delta''^2 = (\beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)(\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2),$$

on aura la première équation comme conséquence des trois autres. On tire de celles-ci

$$\begin{aligned} \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \delta\delta'' &= 0, \\ \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' - \delta'\delta'' &= 0, \end{aligned}$$

et il est clair qu'il y a une infinité de systèmes de valeurs admissibles pour β, β', γ, γ', δ, δ'.

Le produit vv' pourra se mettre sous la forme $\cos\theta + \omega v \sin\theta$ ou $\operatorname{ch}\theta + \omega v \operatorname{sh}\theta$: or le groupe dérivé de v et v' a pour substitutions les expressions de la forme

$$\pm vv'vv'\ldots \quad \text{ou} \quad \pm v'vv'v\ldots$$

qu'on ramènera à

$$\cos m\theta + \omega v \sin m\theta$$

ou à

$$v(\cos m\theta + \omega v \sin m\theta)$$

ou ...; il sera donc facile de se décider sur la nature du groupe en question.

Il est bon d'observer :

1° Que deux substitutions s et s' étant données, il existera toujours trois substitutions sans partie numérique, v, v', v'' telles que

$$\begin{aligned} s &= vv' \quad \text{ou} \quad v'v, \\ s' &= v'v'' \quad \text{ou} \quad v''v' : \end{aligned}$$

enfin, 2° que l'on a

$$\frac{1}{\nu\nu'} = \nu'\nu.$$

Maintenant proposons-nous de mettre le produit

$$(1) \qquad s^\alpha s'^\beta s^\gamma s'^\delta \ldots$$

sous la forme

$$a + b\nu + c\nu' + d\nu\nu',$$

s et s' désignant des substitutions de la forme $a + b\nu$ et $a' + b\nu'$. Nous supposerons $\nu^2 = 1, \nu'^2 = 1, \nu\nu' = (\nu'\nu)^{-1}$. Le produit (1) est l'expression générale d'une substitution du groupe dérivé de s et s'; s^α est de la forme $\operatorname{ch}\alpha\theta + \nu \operatorname{sh}\alpha\theta$, si l'on suppose $s = \operatorname{ch}\theta + \nu \operatorname{sh}\theta$, en sorte que l'on peut supposer

$$s^\alpha = a_1 + b_1\nu, \qquad s'^\beta = a_2 + b_2\nu', \qquad \ldots,$$

et l'on est ramené à l'évaluation du produit

$$(a_1 + b_1\nu)(a_2 + b_2\nu')(a_3 + b_3\nu)(a_4 + b_4\nu')\ldots;$$

ce produit est de la forme

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots \nu\nu'\nu\nu' \ldots$$

(et $\nu\nu' = \cos\varphi + \omega \sin\varphi$ ou $\operatorname{ch}\varphi + \omega \operatorname{sh}\varphi$, ..., alors $\nu'\nu = \cos\varphi - \omega \sin\varphi$).

Le but que nous poursuivons est surtout d'évaluer la partie numérique du produit (1), ce qui doit permettre de découvrir la nature du groupe dérivé de s et s'; or cette partie numérique est la même que dans l'inverse du produit (1) et cet inverse n'en diffère que par le signe de la partie symboliqne. Nous pouvons donc négliger les termes qui contiennent un nombre impair de facteurs ν ou b et qui, en ajoutant le produit (1) avec son conjugué, disparaîtraient.

La partie numérique du produit (1) sera alors contenue dans

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots (vv')^h$$

ou

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots \cos h\varphi.$$

Le terme placé sous le signe Σ contient un nombre pair de facteurs b, les indices α', β', ... sont croissants; les a contiennent les indices autres que α', β', ..., le nombre h s'obtient comme il suit : on parcourt la suite des indices α', β', ..., et chaque fois que l'on rencontre deux indices consécutifs de même parité on les supprime; la moitié du nombre des indices restants est le nombre h.

Groupes de substitutions à un paramètre.

Considérons les substitutions

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij.$$

Supposons α, β, γ, δ fonctions d'un paramètre t et α', β', γ', δ' égales aux mêmes fonctions d'un autre paramètre t'. Dans le produit

$$ss' = \alpha'' + \beta'' i + \gamma'' j + \delta'' ij,$$

α'', β'', γ'', δ'' seront, en général, des fonctions de t et t'. On peut se demander la condition pour que α'', β'', γ'', δ'' ne dépendent réellement que d'un seul paramètre t''. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$(a) \qquad \frac{\partial \alpha''}{\partial t} : \frac{\partial \alpha''}{\partial t'} = \frac{\partial \beta''}{\partial t} : \frac{\partial \beta''}{\partial t'} = \frac{\partial \gamma''}{\partial t} : \frac{\partial \gamma''}{\partial t'} = \frac{\partial \delta''}{\partial t} : \frac{\partial \delta''}{\partial t'},$$

et l'une des équations précédentes rentrera dans les autres puisque $\alpha''^2 - \beta''^2 - \gamma''^2 + \delta''^2 = 1$. Or la formule (1) du § 4 donne α'', β'', γ'', δ'' et (a) devient

$$\frac{\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\delta}{\partial t}}{\alpha\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}+\beta\frac{\partial\beta'}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\delta\frac{\partial\delta'}{\partial t'}}$$
$$=\frac{\beta'\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\delta}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\gamma}{\partial t}}{\alpha\frac{\partial\beta'}{\partial t'}+\beta\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}+\delta\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial\delta'}{\partial t'}}$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or, si l'on observe que le déterminant de $s'\frac{\partial s}{\partial t}$ est égal au produit des déterminants de s' et de $\frac{\partial s}{\partial t}$, c'est-à-dire qu'il est égal au déterminant de $\frac{\partial s}{\partial t}$, on voit que la suite des rapports précédents est égale au rapport d'une fonction de t seul à une fonction de t' seul; il y a plus, ce rapport est de la forme $\frac{f(t)}{f(t')}$ ou, si l'on veut, $\frac{F'(t)}{F'(t')}$, en sorte que, en prenant pour variables $F(t)$ et $F(t')$, on peut supposer les rapports précédents égaux à l'unité, et alors $\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=\frac{\partial\alpha''}{\partial t'}$, $\cdots$ et α'', β'', γ'', δ'' sont forcément fonctions de $t+t'$, les substitutions s et s' sont alors échangeables : elles sont donc de la forme

$$\cos t+v\sin t,\quad \ldots.$$

Groupes à deux paramètres.

Si l'on suppose que α et α' soient de la forme $f(t_1, t_2)$ et $f(t'_1, t'_2)$ respectivement, etc., α'', β'', γ'', δ'' dépendront, en général, de quatre paramètres; pour qu'ils ne dépendent que de deux paramètres seulement, il faudra que

$$\frac{\partial(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')}{\partial(t_1, t_2, t'_1, t'_2)}=0$$

et que les mineurs du déterminant qui figure dans le premier membre soient nuls. En écrivant ces conditions on arrive, mais assez péniblement à former les groupes à deux paramètres. Il est plus simple de suivre une autre voie et, sans se préoccuper de trouver les groupes les plus généraux à deux paramètres, on peut essayer de trouver d'abord *des groupes* à deux paramètres, ce qui est assez simple.

Les substitutions

$$x' = a x,$$
$$y' = a' x + \frac{1}{a} y,$$

dans lesquelles a et a' sont arbitraires, forment évidemment un groupe; car si l'on pose

$$x'' = a_1 x',$$
$$y'' = a'_1 x' + \frac{1}{a_1} y,$$

on a

$$x'' = a a_1 x,$$
$$y'' = a'_1 a x + \frac{1}{a_1}\left(a' x + \frac{1}{a} y\right) = \left(a'_1 a + \frac{a'}{a_1}\right) x + \frac{1}{a a_1} y$$

et le déterminant des substitutions considérées est un. En sorte que si $s(a, a')$ est une substitution du groupe, on a

$$s(a, a')\, s(a_1, a'_1) = s\left(a a_1,\ a a'_1 + \frac{a'}{a_1}\right).$$

Un groupe à deux paramètres contient une infinité de substitutions infinitésimales dont les puissances sont autant de groupes à un paramètre; donc un groupe à deux paramètres doit contenir des groupes à un paramètre. Soit s une substitution

$$s = \cos\theta - (\beta i - \gamma j + \delta i j) \sin\theta$$

d'un groupe à deux paramètres dont l'un sera θ; β, γ, δ sont des fonctions de θ et d'un autre paramètre que nous appellerons t. Tout groupe à un paramètre se composant de substitutions échangeables est composé de substitutions qui sont des fonctions d'une substitution de la forme

$$\cos\theta + \nu \sin\theta \qquad (\nu = i\beta + j\gamma + ij\delta),$$

où ν est constant, et ce groupe contient le groupe à un paramètre $\cos\theta + \nu \sin\theta$, où θ est variable et ν constant. Donc le groupe des substitutions s doit contenir le groupe à un paramètre obtenu en faisant ν constant, ce qui ne peut avoir lieu que si γ et δ sont fonctions de β (δ est forcément fonction de β et γ, car $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1$). Ainsi, un groupe à deux paramètres peut se mettre sous la forme

$$\cos\theta + (\beta i + \gamma j - \delta ij)\sin\theta,$$

où β, γ, δ sont fonctions d'un paramètre t et où

$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1.$$

Si l'on change θ en θ', t en t', s devient s' et l'on a

$$\begin{aligned} ss' = {} & \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'(\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta') \\ & + i[\beta\sin\theta\cos\theta' + \beta'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\delta\gamma' - \gamma\delta')] \\ & + j[\gamma\sin\theta\cos\theta' + \gamma'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\beta\delta' - \delta\beta')] \\ & + ij[\delta\sin\theta\cos\theta' + \delta'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\beta\gamma' - \gamma\beta')]. \end{aligned}$$

Si l'on pose aussi

$$s = \cos\theta'' + \nu''\sin\theta'' = \cos\theta'' + (\beta'' i + \gamma'' j + \delta'' ij)\sin\theta'',$$

il faudra déterminer les coefficients de s et s' de telle sorte que β'', γ'', δ'' soient fonction d'un seul paramètre ou que leurs dérivées soient proportionnelles, ou même que les dérivées de leurs rapports soient proportionnelles. Quand on écrit cette condition, on trouve

$$\begin{vmatrix} \beta & \beta' & \delta\gamma'-\gamma\delta' \\ \gamma & \gamma' & \beta\delta'-\delta\beta' \\ \delta & \delta' & \beta\gamma'-\gamma\beta' \end{vmatrix} F(\theta, \theta') = 0,$$

$F(\theta, \theta')$ désignant un certain déterminant qui ne contient que θ et θ', qui n'est pas identiquement nul. Il reste alors à égaler le premier facteur à zéro ; il est égal à

$$1-(\beta\beta'+\gamma\gamma'-\delta\delta')^2 = 0.$$

Si l'on différentie cette formule, on a

$$\beta'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\delta}{\partial t}=0,$$

et si l'on différentie $\beta^2+\gamma^2-\delta^2=1$

$$\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta\frac{\partial\delta}{\partial t}=0,$$

d'où l'on tire, en supposant les quantités $\beta\gamma'-\gamma\beta'$, ... différentes de zéro,

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}:(\gamma\delta'-\delta\gamma')=\frac{\partial\gamma}{\partial t}:(\delta\beta'-\beta\delta')=\frac{\partial\delta}{\partial t}:(\gamma\beta'-\beta\gamma');$$

on trouve de même

$$\frac{\partial\beta'}{\partial t'}:(\gamma\delta'-\delta\gamma')=\ldots.$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}:\frac{\partial\beta'}{\partial t'}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}:\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}=\frac{\partial\delta}{\partial t}:\frac{\partial\delta'}{\partial t'};$$

donc

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\frac{\partial\beta'}{\partial t'}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=0, \qquad \ldots;$$

donc

$$\beta\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial\beta'}{\partial t'}, \ldots \qquad \text{et} \qquad \beta'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\gamma'\frac{\partial\beta}{\partial t}, \ldots$$

sont respectivement indépendants de t' et de t ; donc

$$\beta\gamma'-\gamma\beta', \quad \gamma\delta'-\delta\gamma', \quad \beta\delta'-\delta\beta'$$

sont de la forme $F(t) + \Psi(t')$. Mais si $\beta \frac{\partial \gamma'}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial \beta'}{\partial t'}$ est indépendant de t, il faut qu'il en soit ainsi pour des valeurs particulières de t'; il existe alors une relation linéaire entre β et γ, etc.; on a donc ainsi trois relations linéaires à coefficients constants entre β, γ, δ; ces trois relations ne sont, il est vrai, pas distinctes, mais on a $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1$, si bien que β, γ, δ, β', γ', δ' se réduisent à des constantes. Or ce résultat ne fournit évidemment pas de solution. Il faut donc supposer seulement un des déterminants $\beta\gamma' - \gamma\beta'$, $\gamma\delta' - \delta\gamma'$, $\delta\beta' - \beta\delta'$ nul. Soit

$$\beta\delta' - \delta\beta' = 0,$$

ou

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta'}{\delta'},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $\frac{\beta}{\delta}$ est constant.

Notre groupe aura donc ses substitutions de la forme

$$\cos\theta + \sin\theta(\beta i + \gamma j + k\beta_{ij}),$$

et comme $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1 - \beta^2(1 - k^2)$, k désignant une constante, dans la substitution ss' le coefficient de ij doit être égal à k fois celui de i; cela ne peut avoir lieu que si $k = 1$ et alors $\gamma = \pm 1$ et l'on peut supposer $\gamma = 1$, en changeant, s'il le faut, le signe de θ. Une discussion semblable permettrait de supposer $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$; mais on aurait alors des coefficients imaginaires dans la substitution, ce qui n'a d'ailleurs rien d'inadmissible.

Conclusion.

Supposons que l'on donne deux substitutions s et s'; il sera toujours facile de trouver une substitution t telle que tst^{-1} ait le coefficient de i égal à celui de ij et qu'il en soit de même de $ts't^{-1}$, comme nous allons le voir; mais au groupe dérivé de s et s' correspond un groupe tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $tss't^{-1}$, ..., car si s, s', s'', ... forment un groupe tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $ts''t^{-1}$, ... en forment un aussi, car

$$tst^{-1} \times ts't^{-1} = tss't^{-1}.$$

Il y a plus, si le groupe des s ne contient pas de substitution infinitésimale, le groupe des tst^{-1} n'en contiendra pas non plus et *vice versa*.

Or, en appelant S et S' les transformées des s et s', elles appartiennent maintenant à un groupe continu; elles sont de la forme

$$\cos\theta + \sin\theta(\beta i + \gamma j + \beta ij),$$

et l'on peut supposer β égal à une fonction quelconque de t, prenant des valeurs données pour $t = t_0$ et $t = t_1$. Un produit de la forme $s^\alpha s^\beta s^\gamma \ldots$ sera de la forme

$$\cos[(\alpha + \gamma + \ldots)\theta + (\beta + \delta + \ldots)\theta'] + \ldots,$$

et il contiendra ou ne contiendra pas de substitution infinitésimale, suivant que

$$m\theta + m'\theta'$$

pourra ou non devenir infiniment petit, sans s'annuler rigoureusement, pour des valeurs entières de m et m'.

J'arrive maintenant à la démonstration de la proposition que nous avons admise. D'abord, on peut supposer le déterminant de t égal à un, vu que dans tst^{-1} on peut diviser t et t^{-1} par un même facteur numérique sans altérer le résultat. Soit

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$t = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$ts = st - 2(\delta\gamma' - \gamma\delta')i - 2(\beta\delta' - \delta\beta')j - 2(\beta'\gamma - \gamma\beta')ij;$$

donc, comme $t^{-1} = \alpha' - \beta' i - \gamma' j - \delta' ij$

$$tst^{-1} = s + 2[(\gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\beta\delta' - \delta\beta')j + (\beta\gamma' - \gamma\beta')ij] \times (\alpha' - \beta' i - \gamma' j - \delta' ij).$$

En écrivant que les coefficients de β et δ sont égaux ou que celui de γ est nul, on a une équation du second degré à deux inconnues et en plus l'équation

$$\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2 = 1\,;$$

le problème que nous voulons résoudre admettra donc en général des solutions.

Il est bon d'ailleurs d'observer que la substitution tst^{-1} et s ont même partie numérique.

Note sur les quaternions.

Considérons la substitution de déterminant un

$$a\tau_{11} + b\tau_{12} + c\tau_{21} + d\tau_{22} = s.$$

Si l'on pose

$$i = (\tau_{12} + \tau_{21})\sqrt{-1}, \qquad j = (\tau_{11} - \tau_{22})\sqrt{-1},$$

on aura

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad ij = -ji = k.$$

et la substitution se mettra sous la forme

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = s.$$

On aura

$$\alpha = \frac{a + \alpha}{2}, \qquad \gamma = \frac{a - \alpha}{2\sqrt{-1}},$$

$$\beta = \frac{b + c}{2\sqrt{-1}}, \qquad \delta = \frac{b - c}{2},$$

si α, β, γ, δ sont réels (a, b, c, d ne le seront pas) et la substitution s sera représentée par un quaternion unité. La théorie des quaternions met en évidence un certain nombre de groupes d'ordre fini et remarquables.

Si l'on se rappelle qu'un quaternion

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = \cos\theta + \nu \sin\theta,$$

où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, peut être représenté par un arc de grand cercle tracé, sur une sphère de rayon un, perpendiculairement au vecteur ν et que le produit de deux quaternions unités est représenté par la résultante des arcs qui représentent les facteurs, on voit que des substitutions de la nature de celles que nous considérons ne pourront former que des groupes finis ou continus. On obtient les groupes finis remarquables dont nous venons de parler en considérant les polyèdres réguliers inscrits dans la sphère unité. Les arcs de grand cercle qui joignent les sommets d'un même polyèdre régulier représentent des quaternions ou des substitutions formant un groupe fini.