AUTONNE

Sur un certain jacobien

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 376-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__376_1>

[C3]

SUR UN CERTAIN JACOBIEN;

Par M. AUTONNE.

Soient

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad b_{00} = \frac{\partial A}{\partial a_{00}}, \qquad \dots$$

et les relations $(i, j = 1, 2, \dots, n)$

$$(o) \quad y_i = A_i A_0^{-1}, \quad A_i = a_{i0} + \sum_j a_{ij} x_j, \quad A_0 = a_{00} + \sum_i a_{0j} x_j.$$

A titre d'exercice sur le calcul des déterminants, je me propose de déterminer le jacobien

$$Y = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

La différentiation du système (o) fournit immédiatement

$$A_0^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = A_0 a_{ij} - A_i a_{0j} = p_{ij}.$$

Le déterminant à n^2 éléments P des p_{ij} se compose d'une suite de déterminants constitués de la façon suivante : on remplace dans b_{00}, dans α colonnes, les éléments a par les éléments $A_0 a_{ij}$; dans $n - \alpha$ colonnes, les éléments a par les éléments $- A_i a_{0j}$. Tous les déterminants à quatre éléments

$$\begin{vmatrix} A_i\, a_{0j} & A_i\, a_{0j'} \\ A_{i'} a_{0j} & A_{i'} a_{0j'} \end{vmatrix}$$

sont nuls; donc il suffira de prendre $n - \alpha = 0$ ou 1 et $\alpha = n$ ou $n - 1$. Bref

$$P = A_0^n b_{00} - A_0^{n-1} \sum_j Q_j a_{0j},$$

$$Q_j = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & A_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Dans Q_j retranchons de la $j^{\text{ième}}$ colonne les éléments des autres, multipliés respectivement par $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Il ne restera de A_i que $a_{ij} x_j + a_{i0}$.

$$Q_j = x_j \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1}\, a_{i0} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est b_{00} ; le second, faisant venir la $j^{\text{ième}}$ colonne au premier rang par $j - 1$ dérangements d'indices, est

$$(-1)^{j-2} \begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i0}\, a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $(-1)^{j-1}$ est $(-1)^j b_{0j}$; bref

$$Q_j = b_{00} x_j - b_{0j}, \quad \sum_i a_{0j} Q_j = b_{00}(A_0 - a_{00}) - (A - a^0{}_0\, b_{00}).$$

$$\sum_j a_{0j} Q_j = A_2 b_{00} - A,$$

$$P = A_0^n b_{00} - A_0^{n-1}(A_0 b_{00} - A) = A_0^{n-1} A;$$

enfin

$$Y = \frac{A}{A_0^{n+1}}, \text{ expression homogène de degré zéro}$$

par rapport aux a.

Résolvons les équations (o) par rapport aux x :

$$x_j = \frac{B_j}{B_0}; \qquad B_j = b_{0j} + \sum_i b_{ij} y_i; \qquad B_0 = b_{00} + \sum_i b_{i0} y_i.$$

Il viendra

$$X = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{B}{B_0^{n+1}}; \qquad B = A^n,$$

B étant le déterminant des b (système adjoint des a).

Remplaçons dans B_0 les y par leur expression en x. Il viendra

$$\frac{b_{00} A_0 + \sum_i b_{i0} \left(\sum_j a_{ij} x_j + a_{i0} \right)}{A_0}$$

$$= \frac{b_{00} A_0 - b_{00} \sum_i x_j a_{0j} + A - a_{00} b_{00}}{A_0} = \frac{A}{A_0}.$$

Alors

$$X = \frac{B}{B_0^{n+1}} = A^n \left(\frac{A_0}{A}\right)^{n+1} = \frac{A_0^{n+1}}{A}.$$

$XY = 1$, ce qui devait être.