Nouvelles annales de mathématiques

Maillard

Représentation géométrique de la fonction arc tang z

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 368-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__368_0>

[D6b]

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FONCTION arc tang z;

PAR M. MAILLARD.

Soit

$$w = \operatorname{arc\,tang} z,$$

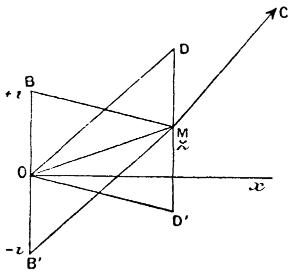
$$w' = \frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right).$$

Intégrant

$$w = \frac{i}{2}\, l\, \frac{z+i}{z-i} + \mathrm{C};$$

mais on a

$$l\,\frac{z+i}{z-i} = l \bmod \frac{z+i}{z-i} + i \arg \frac{z+i}{z-i} + 2k\pi i.$$



Prenons de part et d'autre de M, sur une perpendiculaire à Ox,

$$\mathrm{MD} = \mathrm{MD'} = 1,$$

$$\bmod \frac{z+i}{z-i} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OD'}} = \frac{\mathrm{MB'}}{\mathrm{MB}},$$

$$\arg \frac{z+i}{z-i} = \widehat{\mathrm{D'OD}} = \widehat{\mathrm{BMB'}} = \pi - \widehat{\mathrm{CMB}},$$

$$w = \frac{i}{2}\, l\, \frac{\mathrm{MB'}}{\mathrm{MB}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{\mathrm{CMB}}}{2} + k\pi + \mathrm{C}$$

Faisant $z = 0$, nous trouvons $C = \frac{\pi}{2}$ et, finalement,

$$w = \frac{i}{2} l \frac{MB'}{MB} + \frac{\widehat{CMB}}{2} + k\pi.$$

Si, par exemple, z décrit un contour fermé, il suffira de calculer la variation de l'angle CMB pour en déduire celle de w.