NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RAVUT

Extension du théorème de Cauchy aux fonctions d'une variable complexe de la forme $\rho e^{ie^{IA}\alpha}$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 365-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__365_1>

[D3b]

EXTENSION DU THÉORÈME DE CAUCHY AUX FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE DE LA FORME $\rho e^{ie^{IA}\alpha}$;

PAR M. L. RAVUT.

Cauchy a démontré le premier, dans le cas d'une variable complexe de la forme $\rho e^{i\alpha}$, le théorème suivant qui porte son nom:

Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{i\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire S, l'intégrale

$$\int_S f(z)\,dz,$$

prise le long du contour de cette aire, est nulle.

On peut étendre ce théorème aux courbes fermées de l'espace, situées sur des surfaces coniques ayant pour sommet l'origine des coordonnées ou situées sur des plans renfermant cette origine.

Dans ce cas, la variable complexe z est égale à $\rho e^{ie^{IA}\alpha}$, c'est-à-dire à $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha\cos A + iI\sin\alpha\sin A)$. ρ est le module de z; l'angle α représente le déplacement de ρ dans le plan et l'angle A le déplacement du plan lui-même. Les symboles d'opérations i, I satisfont d'ailleurs aux relations

$$i^2 = -1, \qquad I^2 = -1, \qquad iI = -Ii.$$

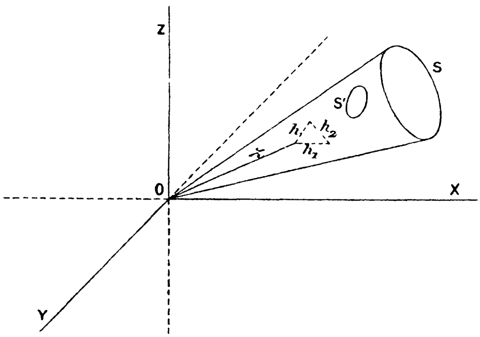
Si l'on a $A =$ constante ou $= 0$, ρ et α étant variables, z se meut dans un même plan.

Théorème de Cauchy généralisé. — *Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{ie^{\mathrm{IA}}\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire de la surface conique* OS *ou de la surface* S′ *faisant partie de* OS, *les intégrales*

$$\int_{\mathrm{S}} f(z)\,dz, \qquad \int_{\mathrm{S}'} f(z)\,dz,$$

prises le long des contours, S, S′ *seront nulles.*

Pour démontrer ce théorème, considérons un triangle infinitésimal ayant pour sommet l'extrémité de z et pour



côtés les vecteurs h, h_1 et h_2. Nous avons

$$h = h_1 + h_2.$$

Il en résulte que l'on a identiquement

$$(1) \qquad f(z+h)\,h - f(z+h)\,h_1 - f(z+h)\,h_2 = 0.$$

Toutes les fois que le premier membre de cette identité interviendra comme élément dans une limite de somme, on pourra, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier, lui substituer l'une ou l'autre des expressions suivantes :

(2) $$f(z)h - f(z)h_1 - f(z+h_1)h_2,$$

(3) $$f(z+h)h - f(z+h_1)h_1 - f(z+h)h_2,$$

et cela sans changer le résultat final.

Les expressions (2) et (3) nous montrent que, lorsqu'on multiplie la fonction $f(z)$ par l'accroissement de la variable, on peut, dans la substitution que nous avons en vue, prendre indifféremment pour valeur de z dans $f(z)$ sa valeur initiale ou sa valeur finale.

Cela étant, je dis que l'on aura

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$

Pour l'établir, coupons la surface OS à l'aide de surfaces sphériques infiniment voisines ayant pour centre commun le point O, et traçons sur elle des rayons vecteurs infiniment rapprochés. En joignant deux à deux par des droites les points de rencontre consécutifs, nous formerons un certain nombre de polygones élémentaires, que nous pourrons décomposer en triangles.

Si l'on applique l'identité (1) à chacun de ces triangles, en les parcourant tous dans le sens direct, on aura identiquement

$$\Sigma\,[f(z+h)h - f(z+h)h_1 - f(z+h)h_2] = 0.$$

Mais comme l'on peut, sans altérer la limite de la somme, substituer à un produit, tel que $f(z+h)h$, le produit $f(z)h$, tous les produits correspondant aux lignes intérieures se détruiront deux à deux; car, si dans un triangle l'on a le produit $f(z)h$, dans l'un des triangles contigus l'on aura le produit $-f(z+h)h$, auquel on pourra substituer le produit $-f(z)h$. Il ne restera donc que les produits se rapportant au contour. Par suite, l'on aura

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$