A. PAGÈS

Premier concours des « Nouvelles annales » pour 1897

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 341-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__341_0>

[D6b]

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897;

PAR M. A. PAGÈS [1].

Établir les propriétés fondamentales des fonctions circulaires en prenant comme définition de $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ l'expression

$$S(x) = x \Pi' \left[\left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}} \right], \tag{1}$$

le produit Π' *étant étendu à toutes les valeurs de l'entier n de* $-\infty$ *à* $+\infty$, o *excepté.*

On pourra introduire la fonction

$$C(x) = \frac{S'}{S} = \frac{d}{dx} \log S(x);$$

montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\,C(x)}{dx} = -[\pi^2 + C^2(x)]$$

et en déduire les formules d'addition pour $C(x)$ *et* $S(x)$.

Développement.

Je me propose d'établir les propriétés fondamentales des fonctions circulaires, comme l'indique le titre de la question, de la manière la plus élémentaire et la plus directe. La difficulté du sujet ne consiste pas dans la valeur des résultats à trouver, mais bien dans la mise en

[1] Mémoire ayant obtenu le prix.

lumière des propriétés que l'on doit appeler *fondamentales* et dans le choix de ces propriétés.

Je qualifierai de *fondamentales* les propriétés suivantes :

La périodicité et ses conséquences, les relations algébriques qui existent entre les fonctions circulaires aux mêmes périodes, les théorèmes d'addition qui dérivent des relations précédentes, les diverses formes analytiques sous lesquelles on peut mettre ces fonctions et le lien qui les rattache à l'exponentielle.

Telle sera la marche suivie dans l'étude de $S(x)$ et $C(x)$. A la fin je dirai un mot des équations

$$S(x) = S(x_0), \qquad C(x) = C(x_0):$$

ce qui conduit aux fonctions inverses. Après cela, tout ce qui reste à étudier n'est qu'une conséquence immédiate des propriétés précédentes et se retrouve partout.

Enfin, je terminerai en donnant, d'après M. Hermite, l'expression de toute fonction circulaire sous la forme de la décomposition en éléments simples et sous la forme d'un quotient de deux produits de fonctions S, et en énumérant quelques propriétés générales de ces fonctions.

Dans le courant du raisonnement plusieurs démonstrations se sont présentées pour certaines propriétés : j'ai toujours choisi celle qui supposait le moins de connaissances et qui se rapprochait le plus des définitions : on en verra un exemple dans le théorème d'addition de la fonction $C(x)$, démonstration qui, d'ailleurs, est empruntée à Eisenstein.

1° *Propriétés préliminaires des fonctions*

$$S(x), \quad C(x) \quad \text{et} \quad \frac{dC(x)}{dx}.$$

I. La fonction

$$\text{(1)} \qquad S(x) = x\Pi'\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right],$$

où le produit Π' est étendu à toutes les valeurs de l'entier n de $-\infty$ à $+\infty$, zéro excepté, est régulière en tous les points à distance finie. Elle admet pour seuls zéros les points $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm 2$, ... De plus elle est impaire; en effet, on peut poser, en changeant le signe de x,

$$S(x) = x\Pi'\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Changeons x en $-x$, dans cette égalité, et comparons à la première forme de $S(x)$, on voit que

$$S(-x) = -S(x).$$

Le point ∞ est un point singulier essentiel de $S(x)$; en effet, si l'on fait $x=\frac{1}{x'}$, on voit que dans une aire aussi petite qu'on le veut, entourant le point $x'=0$, la fonction $S\left(\frac{1}{x'}\right)$ admet une infinité de zéros, $x'=\frac{1}{n}$. Le point $x'=0$ est donc un point singulier essentiel.

Prenons la dérivée logarithmique de $S(x)$ et posons

$$\text{(2)} \qquad C(x) = \frac{S'}{S} = \frac{1}{x} + \sum_n{}' \left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right),$$

le symbole $\sum_n{}'$ indiquant une sommation étendue à toutes les valeurs de l'entier n de $-\infty$ à $+\infty$; l'accent ($'$) signifie que la valeur $n=0$ est exclue comme, d'ailleurs, dans le produit Π'.

La fonction $C(x)$ est aussi impaire : cela résulte de ce que, $S(x)$ étant impaire, $S'(x)$ est paire. Le développement (2) montre qu'elle a pour pôles simples tous les points 0, ± 1, ± 2, ..., et ceux-là seulement, le résidu relatif à chacun de ces pôles étant 1. Le développement (2) met donc en évidence les pôles et les parties principales correspondantes de la fonction. Le point $x = \infty$ est un point singulier essentiel pour $C(x)$ comme pour $S(x)$.

Il est aisé de reconnaître que $C(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$.

On a, en effet,

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \lim_{p=\infty} \sum_{n=1}^{n=p} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n}\right) + \lim_{p=\infty} \sum_{n=-1}^{n=-p} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n}\right).$$

Le second membre est la limite pour p infini de

$$\begin{aligned} 2 &+ \left(1 - \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{2p-1}\right) \\ &+ \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{2p+1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{2p+1}, \end{aligned}$$

limite qui est évidemment nulle.

Considérons maintenant la fonction

$$(3) \qquad p(x) = -\frac{dC}{dx} = \sum_n \frac{1}{(x-n)^2},$$

le signe $\sum\limits_n$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n, de $-\infty$ à $+\infty$, zéro compris.

Cette fonction est paire. Elle a pour pôles doubles tous les points $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; la partie principale relative au pôle $x = n$ est $\frac{1}{(x-n)^2}$.

Périodicité des fonctions

$$S(x), \quad C(x) \quad \text{et} \quad p(x) = -\frac{d\,C(x)}{dx}.$$

Ce que nous venons de dire met en évidence la périodicité des fonctions que nous venons d'introduire $S(x)$, $C(x)$ et $p(x)$.

Tout d'abord le développement (3) de $p(x)$ montre immédiatement que cette fonction ne change pas quand on ajoute 1 à x, car cela ne fait que déplacer les termes du second membre : de l'égalité

$$p(x+1) = p(x) \tag{4}$$

on déduit, par intégration,

$$C(x+1) = C(x) + h,$$

h étant une constante. Si l'on fait $x = -\frac{1}{2}$,

$$C(\tfrac{1}{2}) = C(-\tfrac{1}{2}) + h = 0,$$

et, comme $C(x)$ est impaire, $h = 0$. Donc $C(x)$ admet aussi 1 pour période. On aurait pu le démontrer directement en formant la différence $C(x+1) - C(x)$.

Intégrons encore les deux membres de la relation

$$C(x+1) = C(x), \tag{3}$$

on a

$$\log S(x+1) = \log S(x) + \log k,$$

où k est une constante.

D'où

$$S(x+1) = kS(x);$$

faisons $x = -\frac{1}{2}$, il vient

$$S(\tfrac{1}{2}) = kS(-\tfrac{1}{2}) = -kS(\tfrac{1}{2}),$$

d'où $k = -1$. On a donc la formule

$$S(x+1) = -S(x), \tag{6}$$

de laquelle on tire

$$S(x+2) = -S(x+1) = S(x). \tag{7}$$

La fonction $S(x)$ admet donc le nombre 2 comme période.

D'ailleurs, elle n'admet pas d'autre période que le nombre 2 et ses multiples entiers. En effet, $S(x)$ ne peut admettre comme période un nombre impair $2n+1$; on a, en effet, puisque 2 et $2n$ sont des périodes,

$$S(x+2n+1) = S(x+1) = -S(x).$$

Mais un nombre qui ne serait pas entier ne peut être une période; en effet, puisque la fonction $S(x)$ s'annule pour $x=0$, elle doit s'annuler pour toute période; or elle ne s'annule que pour des valeurs entières de x.

On a donc les relations

$$(6') \qquad S(x+2n) = S(x),$$

$$(7') \qquad S(x+2n+1) = -S(x);$$

d'où, en dérivant,

$$(6'') \qquad S'(x+2n) = S'(x).$$

$$(7'') \qquad S'(x+2n+1) = -S'(x).$$

On ne peut pas avoir

$$S'(x+k) = S'(x),$$

si k n'est pas un nombre pair. En effet, on déduirait de cette relation

$$S(x+k) = S(x) + h$$

et, en changeant x en $x+1$,

$$-S(x+k) = +S(x) + h,$$

ce qui entraîne $h=0$, et, par suite, k est une période de $S(x)$.

Pareillement, on montrerait que, si l'on a

$$S'(x+k) = +S'(x),$$

k est un nombre impair.

Les formules (6′), (7′), (6″), (7″) montrent que la seule période de $C(x)$ est le nombre 1.

De même, la seule période de $\wp(x)$ est 1 ; soit, en effet, un nombre k tel que

$$\wp(x+k)=\wp(x), \quad \text{d'où} \quad C(x+k)=C(x)+h,$$

h étant une constante.

Si l'on fait $x=-k$, le premier membre de cette dernière égalité devient infini ; par suite aussi, $C(k)$, et le nombre k ne peut être qu'un entier.

II. Formule d'addition de $C(x)$. — Établissons maintenant la formule d'addition pour $C(x)$: la manière même dont nous l'établirons nous montrera qu'elle est algébrique.

A cet effet, commençons par montrer qu'il existe une relation algébrique entre $\wp(x)$ et $C(x)$. Nous allons suivre pour cela une analyse d'Eisenstein (*Journal de Crelle,* t. 135, p. 191).

Posons, avec l'éminent géomètre allemand,

$$C(x)=\frac{1}{x}+\sum_n{}'\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)=(1,x),$$

ou encore

$$(1,x)=\sum_n\frac{1}{x+n},$$

l'entier n prenant successivement les valeurs 0, ± 1, ± 2, ... ; de même, soit encore

$$(2,x)=\wp(x)=\sum_n\frac{1}{(x+n)^2},$$

$$(3,x)=\sum_n\frac{1}{(x+n)^3}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(2,x)=\frac{1}{2}\frac{d^2C(x)}{dx^2},$$

$$(4,x)=\sum_n\frac{1}{(x+n)^4}=-\frac{1}{3}\frac{d}{dx}(3,x)=-\frac{1}{6}\frac{d^3C(x)}{dx^3},$$

. . . .

Considérons l'identité élémentaire

$$(8) \qquad \frac{1}{p^2}\frac{1}{q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

Si l'on y fait

$$p = x+n, \qquad q = -x-m,$$

elle devient

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x+n)^2}\frac{1}{(x+m)^2} &= \frac{1}{(n-m)^2}\left[\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{1}{(x+m)^2}\right] \\ &\quad + \frac{2}{(n-m)^3}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+m}\right), \end{aligned} \right.$$

cette identité est vraie, quels que soient les entiers m et n, pourvu que $m \neq n$.

Étendons alors l'identité (9) à toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de m et n, en supposant toutefois $m \neq n$. En sommant d'abord le premier membre et laissant n fixe, on a

$$\frac{1}{(x+n)^2}\left[\sum_m \frac{1}{(x+m)^2} - \frac{1}{(x+n)^2}\right]$$

ou bien

$$\frac{1}{(x+n)^2}\left[(2,x) - \frac{1}{(x+n)^2}\right] = \frac{1}{(x+n)^2}(2,x) - \frac{1}{(x+n)^4}.$$

Si l'on somme relativement à n, il vient

$$(2,x)\sum_n \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_n \frac{1}{(x+n)^4} = (2,x)^2 - (4,x).$$

Calculons maintenant le second membre : à cet effet, posons $n - m = m' (m' \neq 0)$, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m'^2}\left[\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(x+m+m')^2}\right] \\ &\quad + \frac{2}{m'^3}\left(\frac{1}{x+m+m'}-\frac{1}{x+m}\right); \end{aligned}$$

laissant d'abord m' fixe et sommant par rapport à m, il vient

$$\frac{1}{m'^2}[(2,x)+(2,x)]+\frac{2}{m'^3}[(1,x)-(1,x)]=\frac{2}{m'^2}(2,x);$$

enfin, étendant la somme à toutes les valeurs de m', sauf $m'=0$, et posant

$$\sum_n{}' \frac{1}{m'^2}=s_1 \qquad (m'\neq 0),$$

il vient

$$(10) \qquad (2,x)^2-(4,x)=2s_1(2,x).$$

Reprenons l'identité (8) et posons

$$p=x+m, \qquad q=n,$$

il vient

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x+m)^2}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{(x+m')^2}\left[\frac{1}{(x+m'-n)^2}+\frac{1}{n^2}\right] \\ &\quad +\frac{2}{(x+m')^3}\left(\frac{1}{x+m'-n}+\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \right.$$

en remplaçant $m+n$ par m' dans le second membre. Comme plus haut, étendons l'identité (10') à toutes les valeurs entières, positives ou négatives de m et n (sauf toutefois pour $x=0$; m seul peut être nul) : le premier membre donne

$$s_1(2,x);$$

quant au second membre, en supposant d'abord m' fixe, il donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x+m')^2}\left[(2,x)-\frac{1}{(x+m')^2}+s_1\right] \\ &\quad -\frac{2}{(x+m')^3}\left[(1,x)-\frac{1}{x+m'}\right]. \end{aligned}$$

Dans la dernière parenthèse $\left(\sum_n{}'\frac{1}{x+m'-n}+\sum_n{}'\frac{1}{n}\right)$, la somme $\sum_n{}'\frac{1}{n}$ est nulle.

Enfin, en donnant à m' toutes les valeurs entières, on a

$$(2, x)^2 - (4, x) + s_1(2, x) + 2(1, x)(3, x) - 2(4, x);$$

d'où

$$s_1(2, x) = (2, x)^2 - (4x) + s_1(2, x) + 2(1, x)(3, x) - 2(4, x),$$

c'est-à-dire

$$(11) \qquad 3(4, x) = (2, x)^2 + 2(1, x)(3, x).$$

Les relations (10) et (11) peuvent s'écrire

$$(10') \qquad \left(\frac{dC}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{6}\frac{d^3C}{dx^3} - 2s_1\frac{dC}{dx},$$

$$(11') \qquad -\frac{1}{2}\frac{d^3C}{dx^3} = \left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + C\frac{d^2C}{dx^2}.$$

Éliminons $\frac{d^3C}{dx^3}$ entre (10′) et (11′), nous obtenons

$$(10'') \qquad 2\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + 6s_1\frac{dC}{dx} - C\frac{d^2C}{dx^2} = 0;$$

dérivons (10′),

$$(11'') \qquad 3\frac{dC}{dx}\frac{d^2C}{dx^2} + 6s_1\frac{d^2C}{dx^2} - C\frac{d^3C}{dx^3} = 0.$$

Éliminons $\frac{d^2C}{dx^2}$ et $\frac{d^3C}{dx^3}$ entre les relations (10″), (11″) et (10′), on obtient finalement l'équation entre C et $\frac{dC}{dx}$,

$$(12) \qquad \frac{dC}{dx} = -(3s_1 + C^2).$$

Déduisons maintenant de la relation (12) la formule d'addition pour $C(x)$.

D'après les notations déjà posées, on a, pour toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de m,

$$\sum_m \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m}\right) = (1, x) - (1, y).$$

d'où

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}\right)\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+n}\right)\\ &\quad=[(1,x)-(1,y)]^2.\end{aligned}\right.$$

Calculons le premier membre de la relation (13) en le développant : on peut écrire le terme général

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+m)(x+n)}+\frac{1}{(y+m)(y+n)}\\ &\qquad-\frac{1}{(x+m)(y+n)}-\frac{1}{(y+m)(x+n)}.\end{aligned}$$

Or, tant que $m \neq n$, on a identiquement

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+m)(x+n)}+\frac{1}{(y+n)(y+n)}\\ &\quad=\frac{1}{m-n}\left(-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+m}+\frac{1}{y+n}\right).\end{aligned}$$

Donc la valeur du premier membre de cette dernière égalité, quand on donne à m et n toutes les valeurs entières, est égale à celle qu'il prend pour $m = n$ augmentée de la valeur du second membre ; or, le second membre est nul après la sommation, donc on a

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n}\left(\frac{1}{(x+m)(x+n)}+\frac{1}{(y+m)(y+n)}\right)\\ &\quad=\sum_{m}\left(\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(y+m)^2}\right)\\ &\quad=(2,x)+(2,y).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}-\frac{1}{(x+m)(y+n)}&=\frac{1}{x-y+m-n}\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+n}\right),\\ -\frac{1}{(j+m)(x+n)}&=\frac{1}{y-x+m-n}\left(\frac{1}{y+m}-\frac{1}{x+n}\right).\end{aligned}$$

Ces dernières identités ont toujours lieu quels que soient

m et n. Pour effectuer les sommations, posons

$$m - n = m',$$

d'où $m = m' + n$, et laissant d'abord m' fixe, il vient

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{1}{x-y+m'}\left(\frac{1}{x+m'+n} - \frac{1}{y+n}\right) \\
&\quad = \frac{1}{x-y+m'}\left(\sum_n \frac{1}{x+m'+n} - \sum_n \frac{1}{y+n}\right) \\
&\quad = \frac{1}{x-y+m'}[(1,x)-(1,y)].
\end{aligned}$$

Si nous faisons varier m', on a

$$(1, x-y)[(1,x)-(1,y)],$$

de même

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{1}{y-x+m'}\left(\frac{1}{y+m'+n} - \frac{1}{x+n}\right) \\
&\quad = (1, y-z)[(1,y)-(1,x)],
\end{aligned}$$

d'où la relation

$$\begin{aligned}
&[(1,x)-(1,y)]^2 = (2,x)+(2,y) \\
&\quad + (1, x-y)[(1,x)-(1,y)] + (1, y-x)[(1,y)-(1,x)],
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[(1,x)-(1,y)]^2 = (2,x)+(2,y)+2(1,x-y)[(1,x)-(1,y)].$$

En changeant y en $-y$ dans cette égalité et remarquant que

$$(2,y) = (2,-y), \qquad (1,y) = -(1,-y),$$

il vient

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &2(1, x+y)[(1,x)+(1,y)] \\ &\quad = [(1,x)+(1,y)]^2 - (2,x) - (2,y); \end{aligned} \right.$$

or, d'après (12),

$$(2,x) = (1,x)^2 + 3s_1, \qquad (2,y) = (1,y)^2 + 3s_1;$$

donc (14) s'écrit, après réductions faites,

$$(1, x+y) = \frac{(1,x)(1,y) - 3s_1}{(1,x)+(1,y)},$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad C(x+y) = \frac{C(x)C(y) - 3s_1}{C(x)+C(y)}:$$

c'est la formule que nous voulions établir.

La méthode suivie pour arriver à la formule (15) est peut-être un peu longue, mais elle a l'avantage d'être élémentaire et de ne faire appel qu'à la définition de $C(x)$ et à la relation (12).

Formule d'addition pour $S(x)$.

Passons maintenant aux formules analogues pour $S(x)$; on a

$$\frac{dC}{dx} = \frac{S''S - S'^2}{S^2} = \frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 = \frac{S''}{S} - C^2,$$

et d'après (12) il en résulte

$$\frac{S''}{S} = -3s_1$$

ou

$$(16) \qquad S'' + 3s_1 S = 0.$$

Multiplions les deux membres de (16) par $2S'$ et intégrons

$$(17) \qquad S'^2 + 3s_1 S^2 = h,$$

h étant une constante; pour déterminer h calculons la valeur de $S'(x)$ pour $x = 0$. Développons $C(x)$ en série de puissances : on a, pour x inférieur à n en valeur absolue,

$$\frac{1}{x-n} = -\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3} - \dots,$$

d'où, en portant cette valeur dans la formule (2),

$$(18) \qquad C(x) = \frac{1}{x} - s_1 x - s_2 x^3 - s_3 x^5 - \ldots;$$

on a posé

$$\sum_n{}' \frac{1}{n^2} = s_1, \qquad \sum_n{}' \frac{1}{n^4} = s_2, \qquad \sum_n{}' \frac{1}{n^6} = s_3, \quad \ldots;$$

les sommes $\sum_n{}' \frac{1}{n^{2k+1}}$ sont nulles.

De là on déduit

$$S(x) = A x e^{-s_1 \frac{x^2}{2} - s_2 \frac{x^4}{4} - \ldots},$$

A étant une constante. Or $A = 1$ puisque $\lim \frac{S(x)}{x} = 1$ pour $x = 0$, par suite

$$S(x) = x\left(1 + \frac{-s_1 \frac{x^2}{2} - s_2 \frac{x^4}{4} - \ldots}{1} - \ldots\right),$$

en se bornant aux deux premiers termes du développement de $S(x)$, il vient

$$(19) \qquad S(x) = x\left(1 - s_1 \frac{x^2}{2} + \ldots\right) = x - s_1 \frac{x^3}{2} - \ldots,$$

d'où

$$(20) \qquad S'(x) = 1 - 3 s_1 \frac{x^2}{2} + \ldots$$

et enfin si $x = 0$, on a

$$S'(0) = 1.$$

D'ailleurs, nous établirons tout à l'heure et d'une manière plus simple ces développements (19) et (20). Pour le moment revenons à la relation (17) qui s'écrit

$$(21) \qquad S'^2 + 3 s_1 S^2 = 1.$$

De la formule d'addition de $C(x)$, on déduit

$$(22) \qquad \frac{S'(x+y)}{S(x+y)} = \frac{S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y)}{S'(x)S(y) + S'(y)S(x)},$$

ou bien, d'après la formule (21),

$$S^2(x+y) = \frac{[S'(x)S(y) + S'(y)S(x)]^2}{\left\{\begin{array}{l} 3s_1[S'(x)S(y) + S'(y)S(x)]^2 \\ \quad + [S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y)]^2 \end{array}\right\}}.$$

Or le dénominateur est égal à 1, en appliquant encore la formule (21), et comme pour $y = 0$ le numérateur se réduit à $\pm S(x)$, la formule d'addition pour $S(x)$ est donc

$$(23) \qquad S(x+y) = S'(x)S(y) + S'(y)S(x).$$

D'après l'expression (22) on conclut aussi

$$(24) \qquad S'(x+y) = S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y).$$

Remarque I. — Des relations

$$\left\{\begin{array}{l} p(x) = 3s_1 + C^2, \\ S''(x) = -3s_1 S(x). \end{array}\right.$$

on déduit

$$(25) \qquad p(x) = \frac{S'^2 - S''S}{S^2} = \frac{S^2(x)}{1},$$

et par suite

$$(25') \qquad C^2(x) = \frac{1 - 3s_1 S^2(x)}{S^2(x)}.$$

Remarque II. — L'équation (12) permet de calculer les sommes s_2, s_3 ..., de proche en proche en fonction de la première s_1. En effet l'équation (12) peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{x} - s_1 x - s_2 x^3 - \ldots - s_n x^{2n-1} - \ldots\right)^2$$
$$= \frac{1}{x^2} - 2s_1 + 3s_2 x^2 + \ldots + (2n-1)s_n x^{2n-2} + \ldots:$$

égalant les coefficients de x^{2n-2} et supposant successivement n pair ou impair ($n = 2\mu$ ou $n = 2\mu + 1$), on obtient

$$
\begin{aligned}
(4\mu + 1)S_{2\mu} &= 2S_1 S_{2\mu-1} + 2S_2 S_{2\mu-2} + \ldots \\
&\quad + 2S_{\mu-1} S_{\mu+1} + S^2\mu, \\
(4\mu + 3)S_{2\mu+1} &= 2S_1 S_{2\mu} + 2S_2 S_{2\mu-1} + \ldots \\
&\quad + 2S_\mu S_{\mu+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi on a

$$s_2 = \frac{s_1^2}{5}, \qquad s_3 = \frac{2s_1^3}{5.7}, \qquad s_4 = \frac{11 s_1^4}{5.7.9}, \qquad s_5 = \frac{146 s_1^5}{5^2.7.9.11}, \quad \ldots.$$

Développement de $S(x)$ *et de* $S'(x)$ *en série de puissances.* — De la formule

$$S'^2(x) + 3s_1 S^2(x) = 1 \tag{21}$$

nous allons déduire le développement de $S(x)$ en série de puissances par la formule de Mac-Laurin ; on déduit aisément

$$S_0^{(2n)} = 0, \qquad S_0^{(2n+1)} = (-1)^n (3s_1)^n,$$

d'où

$$S(x) = \frac{1}{x} - 3s_1 \frac{x^3}{1.2.8} + \ldots + (-1)^n (3s_1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots. \tag{26}$$

développement valable quel que soit x ; on en déduit

$$S'(x) = 1 - 3s_1 \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n (3s_1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots. \tag{27}$$

Multiplions l'équation (26) par $i\sqrt{3s_1}$ et ajoutons à (27), il vient

$$S'(x) + i\sqrt{3s_1}\, S(x) = 1 + \frac{ix\sqrt{3s_1}}{1} - \frac{(x\sqrt{3s_1})^2}{1.2} - i\frac{(x\sqrt{3s_1})^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ou bien

$$S'(x) + i\sqrt{3s_1}\, S(x) = e^{ix\sqrt{3s_1}}; \tag{28}$$

telle est la relation d'Euler; on en déduit facilement

$$(29)\qquad S'(x) = \frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} + e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{2},$$

$$(30)\qquad S(x) = \frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} - e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{2i\sqrt{3s_1}},$$

$$(31)\qquad C(x) = i\sqrt{3s_1}\,\frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} + e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{e^{ix\sqrt{3s_1}} - e^{-ix\sqrt{3s_1}}}.$$

De la relation (28) on tire, puisque $S(x)$ et $S'(x)$ changent de signe quand on remplace x par $x+1$,

$$(32)\qquad e^{i\sqrt{3s_1}} + 1 = 0,$$

et la fonction e^z admet $2i\sqrt{3s_1}$ pour période.

Pour simplifier, on voit que nous sommes conduits à poser $\sqrt{3s_1} = \pi$: ainsi se trouve introduit naturellement le nombre π que nous pourrions nous proposer de calculer et qui peut être regardé comme la plus petite racine positive de l'équation

$$e^{ix} + 1 = 0.$$

Remarque I. — Des équations (29), (30) et (31) on pourrait déduire les formules d'addition de $S'(x)$, $S(x)$ et $C(x)$, en admettant la relation (12), déjà démontrée, et aussi l'égalité

$$e^x e^y = e^{x+y},$$

ce qui ne serait pas contradictoire, vu que cette propriété de l'exponentielle est indépendante des fonctions circulaires.

Remarque II. — Pour que la constante $3s_1$ ne figure pas explicitement dans les formules déjà trouvées on peut poser

$$S(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

$$S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = \cos \pi x, \qquad \text{et} \qquad C(x) = \pi \cot \pi x,$$

enfin remplacer πx par x. On retombe ainsi sur les notations ordinaires des fonctions que nous étudions; mais il est inutile de faire un tel changement, vu qu'il n'offre pas un grand intérêt.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS

$$S(x) = S(x_0), \qquad C(x) = C(x_0).$$

De la formule d'addition pour $S(x)$ on déduit

$$S(x + x_0) + S(x - x_0) = 2S(x)S'(x_0)$$

ou bien si

$$x + x_0 = u, \qquad x - x_0 = v,$$

(33) $$S(u) + S(v) = 2S\,\frac{u+v}{2}\,S'\,\frac{u-v}{2};$$

de là

(34) $$S(u) - S(v) = 2S\,\frac{u-v}{2}\,S'\,\frac{u+v}{2}.$$

Si, dans la relation

$$S(x+y) = S(x)S'(y) + S'(x)S(y)$$

on fait

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y = -x,$$

on déduit

$$S\left(\frac{1}{2} - x\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)S'(x) - S'\left(\frac{1}{2}\right)S(x).$$

Or $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, et la relation $S'^2(x) + \pi^2 S^2(x) = 1$ donne

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{\pi}.$$

Nous prenons le signe $+$, vu que, d'après la formule fondamentale (1), $S(x)$ est positif pour $x = \frac{1}{2}$: d'où

(35) $$S\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{S'(x)}{\pi},$$

de même

$$S(x) = \frac{S'\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\pi}. \tag{36}$$

Cela posé, considérons l'équation

$$Sx - Sx_0 = 0.$$

D'après (34) on a

$$2S\,\frac{x - x_0}{2}\,S'\,\frac{x + x_0}{2} = 0,$$

ou bien

$$2\pi S\,\frac{x - x_0}{2}\,S\left(\frac{1}{2} - \frac{x + x_0}{2}\right) = 0. \tag{37}$$

Alors les solutions de l'équation (37) sont

$$x = x_0 + 2n,$$
$$x = -x_0 + 2n' + 1,$$

n et n' étant deux entiers arbitraires.

Pour $S'(x)$ on a deux formules analogues à (33) et à (34)

$$S'(u) + S'(v) = 2S'\frac{u + v}{2}\,S'\,\frac{u - v}{2},$$

$$S'(u) - S'(v) = -2\pi^2 S\frac{u + v}{2}\,S\,\frac{u - v}{2}.$$

De là on déduit les solutions de l'équation $S'(x) = S'(x_0)$, qui sont

$$x = 2n \pm x_0.$$

Passons enfin à l'équation

$$C(x) = C(x_0);$$

on a

$$C(x) + C(x_0) = \frac{S(x + x_0)}{S(x)\,S(x_0)},$$

d'où

$$C(x) - C(x_0) = \frac{S(x_0 - x)}{S(x)\,S(x_0)}.$$

Les solutions de l'équation proposée sont donc celles de $S(x_0 - x) = 0$. D'où

$$x = x_0 + n.$$

En particulier, si $x_0 = \frac{1}{2}$, les fonctions $S'(x)$ et $C(x)$ s'annulent pour les mêmes valeurs $x = n + \frac{1}{2}$.

L'étude des équations précédentes nous permettrait d'aborder maintenant les fonctions inverses des fonctions que nous venons de considérer.

De même la relation d'Euler (28) conduit pour m entier à la formule de Moivre; on a, en effet,

$$[S'(x) + i\pi S(x)]^m = e^{i\pi m x},$$

d'où

$$[S'(x) + i\pi S(x)]^m = S'(mx) + i\pi S(mx).$$

De là on peut déduire les expressions de $S(mx)$ et $S'(mx)$ en fonction des puissances successives de $S(x)$ et $S'(x)$ et pareillement celles de $S^m(x)$ et $S'(mx)$ à l'aide des fonctions S et S' des multiples de la variable x. Enfin, étant donnée la valeur de $S(x)$ ou $S'(x)$, on peut étudier les équations qui donnent $S\left(\frac{x}{m}\right)$ et $S'\left(\frac{x}{m}\right)$. Ces questions sont maintenant faciles à aborder et nous ne nous y arrêterons pas. De même, en imitant les procédés classiques, on peut suivre les variations des fonctions $S(x)$, $S'(x)$ et $C(x)$ quand la variable est réelle et comprise entre 0 et 2 ou 0 et 1.

Enfin on peut introduire et étudier les trois nouvelles fonctions

$$\operatorname{tang}(x) = \frac{1}{C(x)} = \frac{S(x)}{S'(x)},$$

$$\operatorname{séc}(x) = \frac{1}{S'(x)},$$

$$\operatorname{coséc}(x) = \frac{1}{S(x)}.$$

Terminons cette étude rapide par la démonstration des formules qui permettent d'exprimer une fonction circulaire quelconque, et par l'examen de deux de leurs propriétés essentielles.

Nous appellerons *fonction circulaire* ou *trigonométrique* une fonction $f(x)$ rationnelle en $C(x)$ ou en $S(2x)$ et $S'(2x)$.

(On a, en effet,

$$S(2x) = \frac{2C(x)}{\pi^2 + C^2(x)}, \qquad S'(2x) = \frac{C^2(x) - \pi^2}{C^2(x) + \pi^2};$$

ces formules découlent de celles-ci

$$S(2x) = 2S(x)S'(x),$$
$$S'(2x) = 2S'^2(x) - 1 = 1 - 2\pi^2 S^2(x),$$

lesquelles proviennent elles-mêmes des formules d'addition.)

Une fonction circulaire ainsi définie est uniforme; elle n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles; elle admet pour périodes le nombre 1 et ses multiples entiers. On dit que 1 est une période primitive.

Toute fonction circulaire peut se mettre sous deux formes remarquables rappelant la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, et la mise en évidence des zéros et des pôles de ces fonctions.

1° *Formule de décomposition en éléments simples.* — Soit $f[C(x)]$ une fonction circulaire quelconque, f étant rationnelle. Posons $e^{i\pi x} = z$. De la relation (31) il résulte

$$C(x) = i\pi \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1},$$

de sorte qu'on a

$$f[\mathrm{C}(x)] = \frac{\mathrm{F}_1(z^2)}{\mathrm{F}(z^2)},$$

F et F_1 étant des polynomes entiers en z^2.

Cela posé, décomposons $\frac{\mathrm{F}_1}{\mathrm{F}}$ en fractions simples et considérons l'une d'elles $\frac{\mathrm{A}_k}{(z^2-a)^k}$; posons $a = e^{2i\pi\alpha}$, égalité toujours possible sauf pour $a = 0$; on a

$$\frac{1}{z^2-a} = \frac{1}{e^{2i\pi x}-e^{2i\pi\alpha}} = \frac{e^{-2i\pi\alpha}}{2}\left[-1-\frac{i}{\pi}\mathrm{C}(x-\alpha)\right].$$

De sorte que la somme

$$\frac{\mathrm{A}_1}{z^2-a}+\frac{\mathrm{A}_2}{(z^2-a)^2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_n}{(z^2-a)^n}$$

devient un polynome de degré n en $\mathrm{C}(x-\alpha)$; mais la relation

$$(12) \qquad \frac{d\mathrm{C}}{dx} = -(\pi^2+\mathrm{C}^2),$$

dérivée n fois, permet d'exprimer linéairement les puissances successives de $\mathrm{C}(x-\alpha)$ au moyen des dérivées successives de $\mathrm{C}(x-\alpha)$ jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$. On a donc

$$\sum \frac{\mathrm{A}_k}{(z^2-a)^k} = \mathrm{H} + \mathrm{M}\,\mathrm{C}(x-\alpha) + \mathrm{M}_1\frac{d}{dx}\mathrm{C}(x-\alpha)+\ldots+\mathrm{M}_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathrm{C}(x-\alpha).$$

les constantes H, M, M_1, ... dépendant linéairement des A.

En répétant pour les diverses racines de $\mathrm{F}(z^2)$ ce que nous venons de dire pour la racine a, réunissant la partie entière de $\frac{\mathrm{F}_1(z^2)}{\mathrm{F}(z^2)}$ avec les fractions de la forme

$\frac{1}{z^{2k}}$ et appelant $E(z^2)$ cet ensemble, on a

$$\frac{F_1(z^2)}{F(z^2)} E(z^2) + \sum M\,C(x-\alpha)$$
$$+ \sum M_1 \frac{d}{dx} C(x-\alpha) + \ldots + \sum M_h \frac{d^h}{dx^h} C(x-\alpha).$$

(h est le plus grand des nombres tels que n et certains coefficients M_h peuvent être nuls.) $E(z^2)$ est de la forme

$$\Sigma\, a_k e^{2ik\pi x},$$

où k peut être un nombre entier, positif ou négatif.

C'est là l'expression générale de toute fonction circulaire.

2° *Forme d'un quotient de deux produits de fonctions* S. — On peut écrire

$$f[C(x)] = \frac{[C(x)-a_1][C(x)-a_2]\ldots[C(x)-a_n]}{[C(x)-b_1]\ldots[C(x)-b_p]}.$$

Posons

$$a_k = C(x_k) \qquad \text{et} \qquad b_k = C(x'_k),$$

on a

$$C(x) - C(x_k) = \frac{S(x_k - x)}{Sx\,Sx_k},$$

d'où

$$f[C(x)] = M(Sx)^m \frac{S(x-x_1)\ldots S(x-x_n)}{S(x-x'_1)\ldots S(x-x'_p)}.$$

Quelques quantités x_k ou x'_k peuvent être égales entre elles.

M est une constante et $m = p - n$.

C'est la seconde formule annoncée mettant en évidence les zéros et les pôles de la fonction considérée.

Remarque. — Les fonctions précédentes $f(x)$ admettent la période 1; par un changement linéaire de variable on peut faire en sorte qu'elles admettent une période quelconque 2ω : il suffit de poser

$$x = \frac{x'}{2\omega} \qquad \text{et} \qquad f_1(x') = f(x) = f\left(\frac{x'}{2\omega}\right);$$

on a alors

$$f_1(x' + 2\omega) = f_1(x').$$

Signalons maintenant les deux propriétés essentielles d'une fonction circulaire qui font l'objet des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Entre deux fonctions circulaires aux mêmes périodes $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ a lieu une relation algébrique.*

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où la période commune est 1 : alors y et z sont des fonctions rationnelles de $C(x)$ et l'élimination de $C(x)$ donne une relation algébrique entre y et z; cette relation définit une courbe unicursale.

Les formules (12), (21), (25), (25′) sont des cas particuliers de ce théorème.

Théorème II. — *Une fonction circulaire $f(x)$ admet un théorème d'addition algébrique.*

Démontrons encore ce résultat pour le cas où $f(x)$ admet la période 1 : il est facile de passer au cas d'une période quelconque.

Posons

$$\begin{aligned} f(x) &= F[C(x)] = u, \\ f(y) &= F[C(y)] = v, \\ f(x+y) &= F[C(x+y)] = w; \end{aligned}$$

on a de plus

$$C(x+y) = \frac{C(x)C(y) - \pi^2}{C(x) + C(y)}.$$

Comme F est rationnelle en C, l'élimination de

$C(x)$, $C(y)$ et $C(x+y)$, entre les quatre relations précédentes, conduit à une équation algébrique entre u, v et w.