Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 334-340
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__334_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1546.

(1885, p. 487 et 573.)

Par le foyer d'une parabole on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux, et en leurs milieux on élève des perpendiculaires qui, en se rencontrant, forment un triangle équilatéral.

Démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle est une parabole, et que l'enveloppe de ce cercle se compose d'une droite et d'un cercle.

(E. FAUQUEMBERGUE.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette question a été proposée aussi par M. Fauquembergue, en 1885, dans *Mathesis,* où une solution a été publiée en 1887 (p. 97, n° 491).

Voici une autre solution.

Les milieux I, K, L des rayons vecteurs FA, FB, FC, appartiennent à une parabole. On peut donc considérer les perpendiculaires menées aux extrémités de ces mêmes rayons vecteurs. Elles déterminent un triangle équilatéral, A'B'C', dont les côtés sont trois tangentes à la podaire négative de la parabole par rapport au foyer, courbe connue, signalée ou étudiée maintes fois dans ce Journal (1866, 21-31; 1876, 99, 101, etc.).

Les trois points de contact de trois tangentes formant un triangle équilatéral A'B'C' sont sur un même rayon vecteur de la courbe. Ils sont en ligne droite avec le point F (*loc. cit.*).

La question 1546 est donc identique avec la question 1266, posée, t. VII (2), p. 240, 1878, et dont voici l'énoncé :

Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral. Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle. (E. LUCAS.)

M. Fauquembergue en a récemment donné la solution (1895, p. 5*). Nous y renverrons donc le lecteur.

Question 1700.

(1895, p. 38*.)

Dans la parabole, le produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point sur la parabole, est égal à 8 *fois le cube de la distance du point d'émission des normales au foyer.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Les pieds des normales abaissées du point (α, β) sur la parabole $y^2 = 2px$ sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point $\alpha\beta$; $xy + y(p - \alpha) - p\beta = 0$. En éliminant y ou x entre ces équations, on obtient l'équation aux abscisses ou aux ordonnées des pieds des normales.

Équation aux abscisses

$$x^3 + 2(p - \alpha)x^2 + (p - \alpha)^2 x - \frac{p\beta^2}{2} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} x' + x'' + x''' &= -2(p - \alpha) \\ x'x'' + x'x''' + x''x''' &= (p - \alpha)^2 \end{aligned} \qquad x'x''x''' = \frac{p\beta^2}{2}.$$

On sait que le rayon du cercle de courbure au point $x'y'$ de la parabole est donné par la formule

$$R = p\left(\frac{2px' + 4x_1^2}{y_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On aura donc, pour le produit demandé,

$$\begin{aligned}
P &= p^3\left[\frac{8x'x''x'''(p+2x')(p+2x'')(p+2x''')}{y_1^2 y_2^2 y_3^2}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{(p+2x')(p+2x'')(p+2x''')}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{p^3+2p^2(x'+x''+x''')+4p(x'x''+x'x'''+x''x''')+8x'x''x'''}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{p^3-4p^2(p-\alpha)+4p(p-\alpha)^2+4p\beta^2}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= [(p-2\alpha)^2+4\beta^2]^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Or la distance du point O au foyer F est donné par la formule

$$OF = \sqrt{\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\alpha - p)^2 + 4\beta^2},$$

$$8\overline{OF}^3 = [(2\alpha - p)^2 + 4\beta^2]^{\frac{3}{2}};$$

donc

$$P = 8\overline{OF}^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1713.

(1896, p. 103.)

Trouver par l'analyse le lieu du foyer mobile d'une conique d'excentricité donnée dont l'autre foyer est fixe et dont la directrice correspondant à ce foyer enveloppe une courbe donnée. Vérifier le résultat trouvé par la Géométrie. (B. NIEWENGLOWSKI.)

SOLUTION

Par M. G. DULIMBERT.

Le foyer fixe étant pris pour origine, l'équation générale des coniques du faisceau est de la forme

$$(u^2+v^2)(x^2+y^2) - \varepsilon^2(ux+vy-1)^2 = 0$$

avec

$$f(u, v) = 0,$$

α et β étant les coordonnées du foyer mobile, l'équation doit pouvoir s'identifier avec

$$(u^2 + v^2)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] - \varepsilon^2(ux + vy - p)^2 = 0.$$

Les coefficients de x^2, xy, y^2 étant les mêmes dans les deux équations, les autres doivent l'être aussi, ce qui donne

$$\begin{aligned} u\varepsilon^2(p - 1) &= \alpha(u^2 + v^2), \\ v\varepsilon^2(p - 1) &= \beta(u^2 + v^2), \\ \varepsilon^2(p^2 - 1) &= (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Élevons au carré les deux premières équations et ajoutons membre à membre. Il vient, en tenant compte de la troisième,

$$\frac{\varepsilon^2(p - 1)}{p + 1} = 1, \qquad p = \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1}.$$

On en tire $p - 1 = \frac{2}{\varepsilon^2 - 1}$. Donc enfin

$$\frac{\alpha}{u} = \frac{\beta}{v} = \frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)(u^2 + v^2)}.$$

Résolvons ces équations par rapport à u et v. Il vient

$$u = \frac{2\varepsilon^2\alpha}{(\varepsilon^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}, \qquad v = \frac{2\varepsilon^2\beta}{(\varepsilon^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

L'équation du lieu est donc

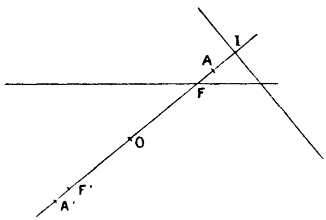
$$f\left[\frac{2\varepsilon^2 x}{(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + y^2)}, \quad \frac{2\varepsilon^2 y}{(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + y^2)}\right] = 0.$$

Or $f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = 0$ représente la podaire de l'enveloppe de la directrice par rapport au foyer fixe. En effet, cette équation résulte de l'élimination de u et de v entre les équations

$$\begin{aligned} ux + vy - 1 &= 0, \\ vx - uy \quad &= 0, \\ f(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

Le lieu cherché est donc une courbe homothétique de la podaire de l'enveloppe de la directrice par rapport au foyer fixe, le centre d'homothétie étant ce foyer, et le rapport d'homothétie $\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$.

Pour vérifier ce résultat géométriquement, supposons que la courbe donnée soit une ellipse; le raisonnement est identique pour l'hyperbole.



Soient I le pied de la directrice, O le centre, F, F' les foyers, A, A' les sommets de l'axe focal. Puisque l'homothétie est inverse, il faut démontrer que

$$\frac{FF'}{FI} = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Prenons FI pour unité. La figure donne

$$\frac{AF}{\varepsilon} = \frac{AI}{1} = \frac{1}{1+\varepsilon},$$

$$\frac{A'I}{1} = \frac{A'F}{\varepsilon} = \frac{1}{1-\varepsilon},$$

$$AA' = A'I - AI = \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2},$$

$$FF' = AA' \times \varepsilon = \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}.$$ C. Q. F. D.

Dans le cas de l'hyperbole, l'homothétie est directe.

Autre solution de M. AUDIBERT.

Question 1723.

(1896. p. 199.)

Trouver les limites de la fraction

$$\frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}},$$

lorsque

$$1^\circ \quad x = 0,$$

$$2^\circ \quad x = \infty,$$

$$3^\circ \quad a = b,$$

respectivement. (R.-W. GENESE).

SOLUTION

Par M. G. TZITZÉICA.

1° $x = 0$. — On peut développer en série, ou, ce qui est la même chose, appliquer la règle de l'Hôpital. On trouve pour la limite

$$\frac{(a-b)\log\varepsilon}{\varepsilon \log\frac{a}{b}}.$$

2° $x = \infty$. — On peut considérer différents cas. Supposons d'abord $a > b$ et $\varepsilon > 1$. On a alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}} = \lim \frac{\varepsilon^{ax}\left[1 - \varepsilon^{-(a-b)x}\right]}{a^{\varepsilon x}\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon x}\right]} = \lim \left(\frac{\varepsilon^a}{a^\varepsilon}\right)^x.$$

Dans ce cas la limite cherchée est 0 ou ∞, suivant que $\varepsilon^a < a^\varepsilon$ ou $\varepsilon^a > a^\varepsilon$.

Soit maintenant $a > b$ et $\varepsilon < 1$. Alors

$$\lim \frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}} = \lim \frac{\varepsilon^{bx}\left[\varepsilon^{(a-b)x} - 1\right]}{a^{\varepsilon x}\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon x}\right]} = -\lim \left(\frac{\varepsilon^b}{a^\varepsilon}\right)^x = 0 \text{ ou } \infty,$$

suivant que $\varepsilon^b < a^\varepsilon$ ou $\varepsilon^b > a^\varepsilon$.

On pourra considérer de même le cas $a < b$ et $\varepsilon \gtrless 1$.

3° Appliquons la règle de l'Hôpital, en prenant les dérivées des deux termes de la fraction par rapport à a. On trouve de la sorte

$$\frac{\varepsilon^{ax-1}}{a^{\varepsilon x-1}} \log \varepsilon$$

pour la limite cherchée.