Nouvelles annales de mathématiques

Concours général de 1897

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 332-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__332_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1897.

Mathématiques spéciales.

I. Soit $Oabc$ un tétraèdre T trirectangle au sommet O, dont les arêtes Oa, Ob, Oc ont la même longueur l, et soit d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

On suppose que le tétraèdre T se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe OX, OY, OZ de manière que les points a, b, c, d décrivent respectivement les plans qui ont pour équations

$$Y + Z = 0, \qquad Z + X = 0, \qquad X + Y = 0,$$
$$X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0.$$

1° Démontrer que les points symétriques des points a, b, c, d par rapport aux arêtes Oa, Ob, Oc du tétraèdre T décrivent également des plans.

2° Trouver l'équation de la surface S décrite par le sommet O du tétraèdre T. Cette surface, qui est du quatrième degré, a un point triple et trois droites doubles.

3° Par chaque point α d'une droite double passent deux droites δ et δ' qui rencontrent la surface S en quatre points confondus. Chercher pour quelles positions du point α sur cette droite double les droites δ et δ' coïncident.

4° Montrer que tout plan tangent à la surface S coupe cette surface suivant deux coniques et que ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.

II. Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x, continue pour toute valeur de cette variable. On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, inférieure à un nombre fixe k plus petit que 1 :

1° Montrer que l'équation $x - \varphi(x) = 0$ a une et une seule racine réelle a.

2° On forme la suite $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$, où x_0 est une quantité réelle arbitrairement choisie. Montrer que x_n tend vers a quand n devient infini.

Nota. — On a

$$\begin{aligned}
a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
c &= \sin\psi\sin\theta;\\
a' &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c' &= -\cos\psi\sin\theta:\\
a'' &= \sin\varphi\sin\theta,\\
b'' &= \cos\varphi\sin\theta,\\
c'' &= \cos\theta;\\
X &= ax + by + cz,\\
Y &= a'x + b'y + c'z,\\
Z &= a''x + b''y + c''z.
\end{aligned}$$

Mathématiques élémentaires.

On donne dans l'espace trois droites (A), (B), (C). On mène un plan ϖ perpendiculaire à A; soient P, Q, R les points où ce plan rencontre respectivement les droites (A), (B), (C). Soient Q′ le point où la droite A est rencontrée par le plan perpendiculaire à (C), mené par le point Q, et R′ le point où la droite A est rencontrée par le plan perpendiculaire à B, mené par le point R. Démontrer que la longueur du segment Q′R′ reste la même quand le plan ϖ se déplace parallèlement à lui-même.

Existe-t-il des plans coupant les droites (A), (B), (C) en trois points A, B, C, tels que les droites BC, CA, AB soient respectivement rectangulaires avec les droites (A), (B), (C)? S'il existe un pareil plan, il en existe une infinité.

Existe-t-il un point M, tel que si l'on désigne par M′ son symétrique par rapport à la droite A et par M″ le symétrique de M′ par rapport à la droite (B), les points M′ et M″ soient symétriques par rapport à la droite (C)? S'il existe un tel point M, il en existe une infinité. Quel est alors leur lieu?

On examinera le cas particulier où les trois droites (A), (B),

(C) ont un point commun et le cas plus particulier encore où elles forment un trièdre trirectangle.

Dans le cas particulier où les droites (A), (B) ont un point commun O et où la droite (C) est perpendiculaire au plan de ces deux droites, sans passer par le point O, on déterminera le lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC et le lieu du point de rencontre de ces hauteurs. L'un des pieds est fixe.