NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX KLEIN

Sur la stabilité d'une toupie qui dort (Sleeping)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 323-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__323_0>

[R8cβ]

SUR LA STABILITÉ D'UNE TOUPIE QUI DORT (SLEEPING);

Résumé d'une Conférence faite devant la Société mathématique américaine
à la réunion de Princeton, le 17 octobre 1896,

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(*Bulletin of the american mathematical Society*, 2d series, Vol III, n° 4, p. 129-132. New-York, janvier 1897.)

Traduit par M. L. LAUGEL.

Dans les quatre Conférences [1] de la première partie de la semaine, je me suis efforcé de simplifier les formules relatives au mouvement de la toupie, en profitant des méthodes de la théorie moderne des fonctions. En traitant ce problème j'ai été surtout influencé par cette considération qu'il est désirable de renforcer des deux parts les relations entre les Mathématiques pures et la Mécanique.

Je vais, aujourd'hui, considérer, au même point de vue, une question beaucoup plus élémentaire, mais qui, précisément pour cette raison, servira de type pour nombre de problèmes de ce genre; c'est le problème relatif à la stabilité d'une toupie animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe dirigé en l'air verticalement. Nous supposerons le point de support fixe.

[1] Quatre Conférences « Sur la Théorie de la Toupie », faites par M. Klein, à l'invitation de l'Université de Princeton, à l'occasion de son 150e anniversaire.

S'il était mobile sur un plan horizontal, les formules seraient un peu plus compliquées, mais le résultat final serait tout pareil à celui dans le cas spécial.

Lorsque la rotation est très rapide la toupie se comporte comme si l'axe était maintenu fixe par une force spéciale. Cette idée a été employée par Foucault, par exemple, en 1851; mais regarder cette idée comme étant un principe de Mécanique indépendant est, cela va sans dire, une absurdité.

La méthode habituelle au moyen de laquelle on attaque le problème est celle *des petites oscillations*. Soient x, y les coordonnées horizontales du point de support de la toupie, n la vitesse de rotation et P le moment du poids de la toupie; alors, en négligeant les puissances supérieures de x et y, nous obtenons les équations différentielles linéaires homogènes suivantes à coefficients constants

$$x'' + ny' - Px = 0,$$
$$y'' - nx' - Py = 0.$$

Dans ces équations, les termes en x' et y' sont dits les termes gyroscopiques. Les solutions des équations renferment l'exposant caractéristique

$$\lambda = \frac{\pm in \pm \sqrt{4P - n^2}}{2}.$$

Relativement à la forme de cet exposant, l'on distingue d'habitude deux cas : le *cas stable*, $n^2 > 4P$, et le *cas instable* $n^2 \leqq 4P$; l'on conclut alors de la discussion que, dans le premier cas, ont lieu actuellement des oscillations autour de la position d'équilibre, tandis que, dans le second, l'axe s'écarte indéfiniment de la position d'équilibre.

Dans le cas stable, nous obtenons

$$x = a \cos \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}}\, t,$$

$$y = a \sin \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}}\, t,$$

où a est une constante d'intégration.

Je conserverai les désignations *stable* et *instable* pour les cas respectifs $n^2 > 4P$ et $n^2 \leqq 4P$, et j'examinerai si le mouvement correspond véritablement à l'acception habituelle que l'on donne à ces mots.

Dès le début, cette méthode des petites oscillations prête à une critique sévère. Dans le cas dit *instable*, elle est en contradiction directe avec elle-même, car les quantités qui, dans la formation de l'équation différentielle, sont supposées être *petites*, deviennent *grandes* après l'intégration de l'équation. Par conséquent, il n'y a absolument aucune raison pour regarder les résultats comme étant une approximation des conditions véritables. Et dans le cas stable même, la méthode ne repose pas sur une base solide.

M. Poincaré, dans les questions correspondantes du domaine de l'Astronomie, pousse les développements en séries jusqu'aux termes plus élevés. Mais, même si nous admettons que les séries soient convergentes, leur région de convergence s'étend-elle suffisamment pour que l'on puisse de ces séries déduire le véritable caractère du mouvement? Dans le cas de la toupie, nous n'avons pas à nous préoccuper de la discussion laborieuse de cette question, car l'intégration complète peut être effectuée sous forme explicite.

Je propose de traiter le problème de la manière suivante. Pour simplifier nous supposerons que les moments d'inertie de la toupie par rapport à ces axes principaux sont égaux à 1. L'axe étant primitivement vertical, soient ϑ et Ψ les angles polaires à l'instant quelconque t, et soit $\cos\vartheta = u$.

Les formules d'intégration sont alors

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad \Psi = n \int \frac{du}{(u+1)\sqrt{U}},$$

où

$$U = 2(u-1)[n^2 + (Pu - n)(u+1)].$$

L'extrémité supérieure de l'axe (l'*apex* de la toupie) décrit dans tous les cas, sur la surface de la sphère circonscrite, une rosace formée par un nombre de boucles congruentes. Il en est encore ainsi lorsque $n = 0$, une boucle étant alors identique à un grand cercle de la sphère. Notre attention se porte alors sur cette question centrale : quelle est la *longueur* de ces boucles, c'est-à-dire jusqu'à quelle valeur la quantité $u = e$ diminue-t-elle, en partant de la valeur $u = 1$. Ici $u = e$ est cette racine de $U = 0$, qui est comprise entre $u = +1$ et $u = -1$. Pour obtenir, d'autre part, la largeur des boucles, il serait nécessaire de faire la discussion de l'intégrale Ψ.

Si nous introduisons la lettre v pour désigner, lorsque $u = 1$, la vitesse angulaire $\frac{d\vartheta}{dt}$ de l'axe de la toupie, cette vitesse étant égale à la mesure de l'impulsion latérale, par l'effet de laquelle l'axe est écarté de la position verticale, nous tirons de $U = 0$, en écrivant e au lieu de u,

$$v^2 = \frac{(1-e)[n^2 - 2P(e+1)]}{e+1}.$$

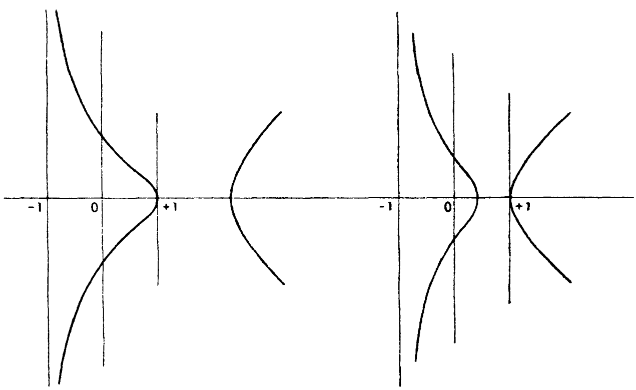
Lorsque e et u désignent des coordonnées rectangulaires, cette équation, interprétée comme il convient, représente une cubique plane, symétrique par rapport à l'axe des e, ayant au point $e = 1$, $v = 0$, une tangente verticale, et ayant la droite $e + 1 = 0$ pour asymptote.

Cette courbe a une certaine différence de situation selon que

$$n^2 - 4P > 0 \quad \text{ou} \quad n^2 - 4P < 0$$

(nous pouvons, en vue d'abréger, laisser de côté le cas $n^2 - 4P = 0$). Dans le premier cas (stable), la branche impaire de la courbe passe par le point $e = +1$, $\nu = 0$, tandis que, dans le second cas (instable), c'est la branche paire qui passe par ce point.

Dans les deux cas c'est la branche impaire qui joue un rôle dans le mouvement effectif de la toupie, puisque $u = \cos\vartheta$ est compris, pour ϑ réel, entre -1 et $+1$. Dans les deux cas aussi, la différence $1 - e$, c'est-à-dire la longueur des boucles de la rosace, diminue avec ν.



La différence caractéristique entre les deux cas est celle-ci :

Pour $n^2 - 4P > 0$, la différence $1 - e$ diminue avec ν, jusqu'à 0, tandis que si $n^2 - 4P < 0$ cette différence ne dépasse jamais une certaine limite inférieure différente de zéro. Par suite, dans le cas instable, les boucles de la rosace prennent de suite une certaine longueur finie, quelque petite que soit l'impulsion latérale donnée à la toupie.

Théoriquement, ceci fournit une distinction bien accentuée entre les deux cas ; dans la pratique cependant cette différence peut devenir inappréciable, si $n^2 - 4P$ étant < 0, devient en même temps très petit en valeur absolue. La rosace, dans le cas instable, peut devenir aussi petite que l'on veut, et, étant donnée une rosace stable, un choix convenable des constantes n et ν donnera, dans le cas instable, une rosace *plus petite* que la rosace stable.

Or ce résultat est en désaccord avec l'acception usuelle des mots *stable* et *instable*. De plus, il ne confirme pas les prétentions de la méthode des petites oscillations. Si l'extrémité supérieure de l'axe, dans le cas instable, décrit une *petite* rosace, pourquoi cette circonstance n'est-elle pas mise en évidence par la méthode des petites oscillations?

La réponse à cette dernière question s'aperçoit immédiatement, si nous introduisons la quantité e dans l'intégrale t

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2(u-e)(1-u)}{1+e}[n^2 - 4P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1)]}}.$$

La méthode des petites oscillations, dans la parenthèse

$$n^2 - 4P - P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1),$$

néglige, par rapport à $n^2 - 4P$, les termes renfermant $u - 1$ et $e - 1$. Or cela est admissible au seul et unique cas où, $u - 1$ et $e - 1$ étant petits, $n^2 - 4P$ *n'est pas petit*, et, par conséquent, les cas, soit stables, soit instables, lorsque $n^2 - 4P$ est une petite quantité, échappent au traitement approximatif par la méthode des petites oscillations.