NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Sur la convergence des substitutions uniformes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 306-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__306_1>

[H11d] [J4a]

SUR LA CONVERGENCE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

On sait que si f désigne une fonction holomorphe ou méromorphe, la substitution

$$x f x$$

répétée indéfiniment fournit une suite de fonctions fx, f^2x, ..., qui, pour une valeur donnée de x, prennent des valeurs pouvant présenter trois cas :

1° Elles croissent ou décroissent sans limite.

2° Elles tendent vers n limites distinctes qui sont racines de l'équation

$$f^n x - x = 0,$$

et l'on sait qu'à partir d'un nombre suffisant d'itérations, la période de convergence est n, c'est-à-dire que les indices d'itération des fonctions qui tendent vers une des n limites suivent une progression arithmétique dont la raison est n.

3° Ou enfin elles tendent vers une seule limite qui est racine de

$$fx - x = 0; \tag{1}$$

c'est le cas précédent où les n limites sont égales. La convergence peut alors avoir pour période soit un nombre entier m, soit l'unité. Soit a un point-racine de l'équation (1); on sait que si l'on a [1]

$$\operatorname{mod}\left(\frac{dfx}{dx}\right)a < 1,$$

il existe autour du point a un domaine dans lequel, x étant pris, il y aura convergence. Je me propose d'étudier le cas où ce module est égal à l'unité; je suppose que la valeur $x = a$ n'a d'autre particularité que d'annuler la fonction $fx - x$ et quelques-unes de ses dérivées. Avant d'étudier le cas d'une seule limite, il faut faire quelques remarques sur le cas de n limites. L'équa-

---

(1) Kœnigs, *Sur certaines équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884; *Supplément*).

tion

$$f^n x - x = 0$$

a d'abord pour racines celles de (1) et, en général, celles de $f^m x - x = 0$, m étant un diviseur de n; elle a aussi des racines qui lui sont propres : elles sont dites d'indice n, et forment des groupes de racines cohérentes. Telles sont les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfaisant aux relations

$$\alpha_2 = f\alpha_1, \qquad \alpha_3 = f\alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = f\alpha_{n-1}, \qquad \alpha_1 = f\alpha_n.$$

L'équation peut admettre d'autres racines cohérentes d'indice n, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, satisfaisant aux mêmes relations. Elles sont toutes distinctes des précédentes ou elles leur sont égales. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\mu = \alpha_p = \beta_q \qquad \text{et} \qquad \alpha_{p+1} \lessgtr \beta_{q+1};$$

on en tirerait

$$\alpha_{p+1} = f\mu, \qquad \beta_{q+1} = f\mu;$$

la fonction f admettrait plus d'une détermination pour une même valeur de la variable, ce qui est contraire à notre hypothèse. Pour la même raison, si, dans un groupe de racines cohérentes, il y en a p égales entre elles, les autres seront aussi égales p à p, et le groupe sera en réalité un groupe de $\frac{n}{p}$ racines cohérentes, répété p fois, de l'équation

$$f^{\frac{n}{p}} x - x = 0,$$

et réciproquement. Si, en particulier, l'une des racines est égale à a racine de $fx - x = 0$, il en sera de même pour toutes les autres.

Considérons maintenant le cas où la dérivée de la fonction donnée prend, au point racine, une valeur dont le module est 1, et l'argument $\frac{2k\pi}{n}$, k et n étant premiers entre eux; on a toujours, comme l'on sait,

$$\left(\frac{df^p x}{dx}\right)_a = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_a^p.$$

Désignons généralement par y_μ la fonction $f^\mu x$, et écrivons la suite des différentes itératives, en plaçant sur une même ligne celles qui admettent au point-racine des dérivées égales; on obtient le Tableau suivant

$$\begin{array}{llllll}
x\ (\text{ou } y_0) & y_n & y_{2n} & \cdots & y_{qn} & \cdots \\
y_1 & y_{n+1} & \cdots & \cdots & y_{qn+1} & \cdots \\
y_2 & \cdots & & & & \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & \\
y_{n-1} & y_{2n-1} & \cdots & \cdots & y_{(q+1)n-1} & \cdots;
\end{array}$$

l'ensemble de toutes les colonnes donne la suite de toutes les itératives et les fonctions formant la $(h+1)^{\text{ième}}$ ligne ont pour dérivée au point-racine

$$e^{\frac{2k\pi h}{n}\sqrt{-1}}.$$

Les termes d'une même colonne sont liés entre eux par les relations

$$y_{qn+1} = fy_{qn} \cdots y_{(q+1)n-1} = fy_{(q+1)n-2} \cdots$$

Par suite si, pour une valeur donnée de x, les valeurs des termes d'une même ligne tendent vers une limite unique, il en sera de même pour les autres lignes; on aura

$$y_{qn+1} = fy_{(q+1)n-1};$$

les relations ci-dessus formeront un cycle fermé, et l'ensemble des n limites constituera un groupe de racines cohérentes.

Si, en particulier, une de ces limites est a, il en sera de même des autres et l'ensemble convergera vers a. Il nous suffit donc de chercher sous quelles conditions les termes d'une quelconque des lignes convergeront vers a.

Parmi les lignes du Tableau ci-dessus, je choisirai la première dont les termes jouissent de la propriété suivante :

Si, en un point-racine de l'équation $fx - x = 0$, la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ a une valeur de module 1 et d'argument $\frac{2k\pi}{n}$ k et n étant premiers entre eux, les n premières dérivées de la fonction $f^n x - x$ au même point seront nulles, quelles que soient les dérivées de la fonction fx pourvu qu'elles ne soient pas infinies. Il en sera de même pour $f^{2n}x, f^{3n}x, \ldots$.

En effet, pour la dérivée première, on a

$$\left(\frac{df^n(x)}{dx}\right)_a = e^{\frac{2k\pi n}{n}\sqrt{-1}} = 1.$$

En ce qui concerne les autres dérivées, je me reporterai aux formules données par M. Korkine (¹). Comme l'on a, par définition,

$$ff^n(x-a) = f^n f(x-a), \tag{2}$$

en posant

$$f(x-a) = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i(x-a)^i, \qquad f^n(x-a) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j(x-a)^j.$$

où

$$a_i = \frac{\left(\frac{d^i fx}{dx^i}\right)_a}{i!}, \qquad \alpha_j = \frac{\left(\frac{d^j f^n x}{dx^j}\right)_a}{j!}.$$

(¹) *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sc. math.*, 1882; Iʳᵉ Partie). Je suis obligé de modifier légèrement les notations de l'auteur.

L'équation (2) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i \Big[\sum \alpha_j (x-a)^j\Big]^i = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j \Big[\sum a_i (x-a)^i\Big]^j.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de $x - a$ dans les deux membres, on a des équations qui permettent de déterminer α_2, α_3, ..., et en tenant compte de ce que α_1 est égal à a_1^n, ces coefficients s'expriment en fonction de n. Je ne rappellerai pas ces formules; pour ce qui suit, il suffit de remarquer que chacun de ces coefficients est de la forme

$$\alpha_p^{(n)} = S\Psi(a_1^n - 1)\frac{P}{Q},$$

S représentant une somme finie de termes dans lesquels Ψ est un monome en a_1, a_2, ..., a_p, l'exposant de plusieurs de ces facteurs pouvant être nul; P un polynome en a_1^n; Q un produit de facteurs binomes de la forme $a^q - 1$, la plus grande valeur que puisse prendre q étant $p - 1$. Cela posé, et dans l'hypothèse

$$a_1 = e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

toutes les fois que dans l'expression de $\alpha_p^{(n)}$, l'indice de dérivation p sera non supérieur à l'indice d'itération n, aucun des binomes dont le produit est Q ne sera nul, car le premier qui puisse s'annuler, savoir $a_1^n - 1$, n'y figure pas. Quant au facteur $a_1^n - 1$, il est nul; chacun des termes de la somme est donc nul ([1]), ce qui dé-

---

([1]) Si l'on considère la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$, elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur, que l'on aurait facilement, ne sera nulle que s'il existe certaines relations entre les coefficients $a_{\,}$, a, ...

montre la proposition. On a donc

$$y_n - a = x - a + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \ldots,$$

où A_{n+1} désigne la valeur, au point-racine, de la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de y_n. On aura aussi, en général,

$$y_{(q+1)n} - a = y_{qn} - a + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(y_{qn} - a)^{n+1} + \ldots.$$

Pour qu'il y ait convergence, il faut que si u est l'affixe d'une itérative de la fonction $f^n x$, supposé à une distance infiniment petite ρ du point a, l'affixe u_1 de la fonction itérative suivante soit à une distance ρ_1 de a plus petite que ρ ; autrement dit que l'on ait

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \varepsilon,$$

ε pouvant être infiniment petit mais positif. Par suite, si l'on pose

$$u - a = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad u_1 - a = \rho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}}, \qquad A_{n+1} = R e^{\omega\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\rho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}} = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{R e^{\omega\sqrt{-1}}}{(n+1)!} \rho^{n+1} e^{(n+1)\theta\sqrt{-1}},$$

et il faudra avoir

$$\operatorname{mod}\left[\rho e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{R\rho^{n+1}}{(n+1)!} e^{[\omega+(n+1)\theta]\sqrt{-1}}\right] < \rho,$$

ce qui devient, en négligeant les puissances supérieures de ρ,

$$1 + 2\frac{R\rho^2}{(n+1)!}\cos(\omega + n\theta) < 1,$$

ou

$$\cos(\omega + n\theta) < 0.$$

Ainsi, il faudra qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de l'indice d'itération, on ait constamment

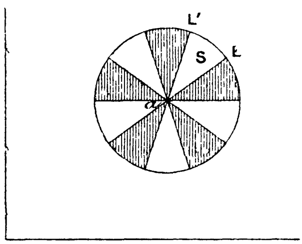
$$\frac{(2h+3)\frac{\pi}{2}-\omega}{n} > \theta > \frac{(2h+1)\frac{\pi}{2}-\omega}{n},$$

ou

$$\frac{h\pi}{n}+\frac{3\frac{\pi}{n}-\omega}{n} > \theta > \frac{h\pi}{n}+\frac{\frac{\pi}{2}-\omega}{n}.$$

Par conséquent, à une distance infiniment petite de a, le domaine de convergence sera composé d'un secteur S, d'amplitude $\frac{\pi}{n}$, compris entre les demi-droites aL,

Fig. 1.



aL' faisant avec l'axe réel, les angles $\frac{\pi-2\omega}{2n}$ et $\frac{3\pi-2\omega}{2n}$, ainsi que des $n-1$ secteurs obtenus en faisant tourner le secteur S des angles $\frac{2\pi}{n}$, $2\frac{2\pi}{n}$, ... $(n-1)\frac{2\pi}{n}$. Entre deux secteurs de convergence consécutifs, il existe un secteur de même amplitude $\frac{\pi}{n}$ dans lequel θ ne doit pas être pris. On voit aussi qu'à tout secteur de convergence correspond un secteur opposé par le sommet qui sera secteur de convergence ou non suivant que n est pair ou impair. Si l'on sait inverser la fonction fx, les secteurs de divergence de la substitution $(x, f^n x)$ seront secteurs de convergence de $(x, f^{-n} x)$; mais $f^{-n} x$

admettant, en général, plusieurs déterminations, on n'aura convergence vers a que si l'on choisit, parmi ces déterminations, celle qui se trouvera dans le domaine de a. Considérons maintenant, non plus la substitution $(x, f^n x)$ mais toute autre substitution $(x, f^{n+\nu} x)$; si Θ est un angle limite pour la première $\Theta + \frac{2\nu\pi}{n}$ sera un angle limite pour la seconde; par suite, tout secteur de convergence pour $f^n x$, l'est aussi pour $f^{n+\nu} x$, et finalement fx. On arrive ainsi à ce résultat remarquable : quand le module de la dérivée est plus petit que 1, la surface entière du cercle infiniment petit décrit autour de a comme centre donne convergence pour la substitution directe et divergence pour la substitution inverse; quand le module est égal à 1, une moitié de la surface du cercle donne convergence pour la substitution directe, divergence pour la substitution inverse, l'autre moitié produit l'effet contraire; enfin, quand le module est plus grand que 1, la surface entière du cercle donne divergence pour la substitution directe, convergence pour la substitution inverse: à cause des déterminations multiples de la fonction inverse, la convergence par la substitution correspondante sera d'une application délicate.

Il n'est pas sans intérêt de comparer les résultats ci-dessus avec ceux qu'on obtient directement en considérant le cas où la racine est réelle ainsi que les dérivées $f^{(n)}a$. Supposons la dérivée première égale à 1 au point-racine et la dérivée seconde différente de zéro (*fig.* 2 et 3).

Le chemin brisé rectangulaire, dont les sommets sont alternativement sur la courbe $y = fx$ et sur la droite $y = x$ et parcouru de telle sorte qu'on aille de la courbe à la droite par une parallèle à Ox, représente par les ordonnées des points 1, 2, 3, ... les valeurs des itératives successives, la valeur initiale étant x ; on a, en effet,

$$\text{Ordonnée de } 1 = fx,$$
$$\text{Ordonnée de } 2 = f(\text{ordonnée de } 1) = f^2 x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour que les valeurs de ces ordonnées convergent vers a, il faut que, si la courbe a ses ordonnées supérieures à celles de la bissectrice des axes, le point de départ soit situé à gauche de a (*fig.* 2). Dans le cas

Fig. 2.

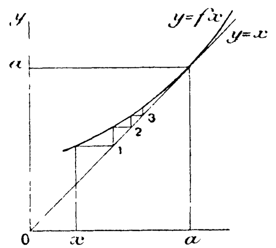
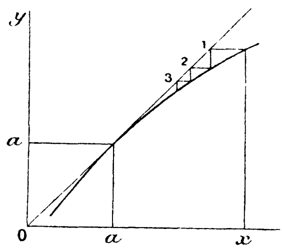


Fig. 3.



contraire, il devra être pris à droite de ce point (*fig.* 3); par conséquent, les différences $fx - x$, et $x - a$ doivent avoir des signes contraires, ce qui revient à la condition

$$\frac{fx - x}{x - a} < 0,$$

comme on peut écrire

$$fx = x + f''a \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots,$$

on devra avoir

$$f''a(x-a) < 0:$$

ce qui n'est, comme on peut le vérifier, qu'une conséquence de la condition générale $\cos(\omega + n\theta) < 0$.

Si la dérivée première $f'a$ est égale à -1 (*fig.* 4 et 5), on voit que les valeurs des ordonnées des points 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ... convergeront vers a, si le rayon

Fig. 4.

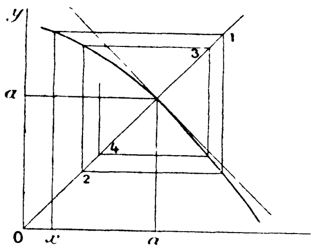
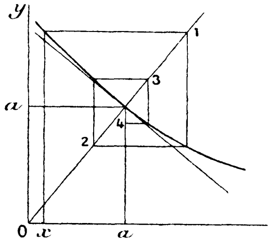


Fig. 5.



de courbure r décroît quand on passe au point de contact; on doit donc avoir

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_a < 0,$$

ce qui, après réduction, équivaut à

$$3(f''a)^2 + 2f'''(a) > 0;$$

c'est la condition à laquelle on arrive encore en écrivant qu'à gauche du point de contact f^2x est plus grande que x, et qu'à droite f^2x est plus petite que x; autrement dit, que l'on a

$$\frac{f^2x - x}{x - a} < 0.$$

En effet, on peut écrire

$$f^2x - a = f^{2\prime}a(x-a) + f^{2\prime\prime}a\,\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots.$$

Or $f^2x = ffx$, par suite

$$\frac{df^2x}{dx} = \frac{df^2x}{dfx}\,\frac{dfx}{dx}$$

et

$$\frac{d^2f^2x}{dx^2} = \frac{df^2x}{dfx}\,\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{d^2f^2x}{dfx^2}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2;$$

pour $x = a$, on a

$$fx = x, \quad \left(\frac{df^2x}{dfx}\right)_a = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_a, \quad \left(\frac{d^2f^2x}{dfx^2}\right)_a = \left(\frac{d^2fx}{dx^2}\right)_a,$$

on a, par conséquent,

$$\left(\frac{df^2x}{dx}\right)_a = (f'a)^2 = 1, \qquad \left(\frac{d^2f^2x}{dx^2}\right)_a = -f''a + f''a = 0.$$

On vérifie ainsi que la dérivée seconde de la fonction f^2x s'annule pour $x = a$.

Pour la dérivée troisième, on a

$$\begin{aligned}\frac{d^3f^2x}{dz^3} = {} & \frac{d^3fx}{dx^3}\frac{df^2x}{dfx} \\ & + 3\frac{d^2f^2x}{dfx^2}\frac{d^2fx}{dx^2}\frac{dfx}{dx} + \frac{d^3f^2x}{dfx^3}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^3,\end{aligned}$$

et, pour $x = a$, il viendra

$$f^{2'''}a = -2f'''a - 3(f''a)^2:$$

nous aurons donc

$$f^2x = x - [2f'''a - 3(f''a)^2]\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots,$$

et la condition

$$\frac{f^2x - x}{x - a} < 0$$

deviendra bien

$$[-2f'''a - 3(f''a)^2](x-a)^2 < 0 \quad \text{ou} \quad 2f'''a + 3(f''a)^2 > 0:$$

elle rentre encore dans la condition générale.

Considérons maintenant les cas où la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = a$ est d'ordre quelconque. Si elle est d'ordre pair (*fig.* 2 et 3), il y aura convergence soit à droite de a, soit à gauche. Si elle est d'ordre impair (*fig.* 6 et 7) elle peut être négative (*fig.* 6) et la substitution (x, fx) sera convergente à droite de a et aussi à gauche. D'après l'analyse générale, on trouve en effet deux secteurs de convergence opposés par le sommet et comprenant les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Quand la dérivée considérée est positive (*fig.* 7) le graphique montre qu'il y a divergence,

Fig. 6.

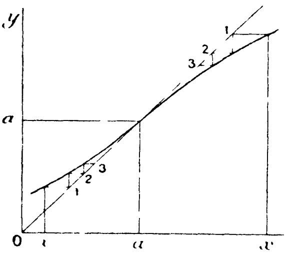
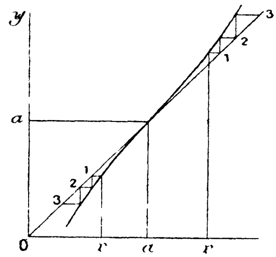


Fig. 7.



que x soit plus grand que a, ou qu'il soit plus petit. En effet, les secteurs de convergence, encore opposés par le sommet, ne comprennent ni l'un, ni l'autre les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On ne pourra donc converger vers a, par la substitution directe, qu'en partant de valeurs imaginaires de x convenablement choisies. Soit, par exemple,

$$fx = x + (x - a)^3;$$

il y a deux secteurs de convergence de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$ et de $\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{7\pi}{4}$.

On pourra faire, par exemple, $\theta = \frac{\pi}{2}$. En effet, soit $x - a = \rho e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \rho\sqrt{-1}$. On aura

$$fx - a = (\rho - \rho^3)\sqrt{-1}.$$

Si ρ est très petit, compris par suite entre 0 et 1, il y aura convergence, car le module $\rho_1 = \rho - \rho^3$ de $fx - a$ est plus petit que le module ρ de $x - a$.

A distance finie de a, les secteurs de convergence sont limités par des courbes tangentes en a aux droites limites. Quant au rayon de convergence, il dépendra de la fonction donnée et devra être étudié dans chaque cas particulier; il est clair que le domaine ainsi défini ne devra contenir aucune autre racine soit de l'équation $fx - x = 0$, soit de toute autre équation

$$f^p x - x = 0.$$

Si, par exemple, une fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varphi^m x - x = 0, \tag{3}$$

et si a désigne une racine de l'équation

$$\varphi x - x = 0,$$

le domaine de convergence autour de a sera d'un rayon infiniment petit, car si près qu'on se place de a on rencontrera, avant d'y arriver, une infinité de racines de l'équation (3) : il ne peut donc y avoir convergence.