NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. JAGGI

Sur une formule de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables et de l'intégration des différentielles totales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 297-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__297_1>

[C21]

SUR UNE FORMULE DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES [1],

PAR M. E. JAGGI,

Licencié ès sciences mathématiques.

La formule que nous nous proposons de démontrer pour les fonctions de plusieurs variables est l'analogue de la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{d\,F(x)}{dx}\,dx \\ &= F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1}\frac{d\,F(x_0)}{dx_0} + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\frac{d^2F(x_0)}{dx_0^2} + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}F(x_0)}{dx_0^{n-1}} - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{d^nF(x)}{dx^n}\,dx^n \end{aligned}\right.$$

du cas d'une seule variable.

On ne sait actuellement mettre les fonctions de plusieurs variables que sous forme d'intégrales multiples qui ne portent pas sur leurs propres dérivées, et sous forme d'intégrales de différentielles totales, pour lesquelles on ne possède pas de procédé méthodique d'intégration.

Une formule, remplaçant l'intégrale de différentielle totale, ne contenant que des intégrales simples ou mul-

---

[1] Extrait d'un Mémoire sur la *Théorie générale des fonctions*, présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences, en 1892.

tiples ordinaires, permettra d'étendre aux fonctions de plusieurs variables les théorèmes que la forme (1) a permis de démontrer pour les fonctions d'une seule variable.

Soit d'abord une fonction de deux variables que nous supposerons sans points critiques; nous écrirons

$$\begin{aligned}F(x, y) = {} & F(x_0, y_0) \\ & + F(x, y_0) - F(x_0, y_0) \\ & + F(x_0, y) - F(x_0, y_0) \\ & + F(x, y) - F(x, y_0) - [F(x_0, y) - F(x_0, y_0)].\end{aligned}$$

Nous avons, en vertu de la formule (1),

$$F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x, y_0)}{\partial x} dx.$$

$$F(x_0, y) - F(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0, y)}{\partial y} dy.$$

$$F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy.$$

$$F(x_0, y) - F(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0, y)}{\partial y} dy.$$

$$\begin{aligned}F(x, y) & - F(x, y_0) - [F(x_0, y) - F(x_0, y_0)] \\ & = \int_{y_0}^{y} \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_0, y)}{\partial y}\right] dy \\ & = \int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} dx\, dy\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}F(x, y) = {} & F(x_0, y_0) \\ & + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x, y_0)}{\partial x} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0, y)}{\partial y} dy \\ & + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} dx\, dy.\end{aligned}\right.$$

Pour une fonction de trois variables $F(x, y, z)$, on trouvera de même, au moyen des formules (1) et (2),

$$
(3)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{F}(x, y, z)\\
&\quad= \mathrm{F}(x_0, y_0, z_0)\\
&\qquad+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial\,\mathrm{F}(x, y_0, z_0)}{\partial x}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\,\mathrm{F}(x_0, y, z_0)}{\partial y}\,dy\\
&\qquad-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial\,\mathrm{F}(x_0, y_0, z)}{\partial z}\,dz+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{\partial^2\mathrm{F}(x, y, z_0)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\\
&\qquad+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial^2\mathrm{F}(x_0, y, z)}{\partial y\,\partial z}\,dy\,dz+\int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2\mathrm{F}(x, y_0, z)}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dz\\
&\qquad+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial^3\mathrm{F}(x, y, z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}\right.
$$

En général, pour une fonction de n variables, on aura, en appelant x_1, x_2, ..., x_n ces n variables et α_1, α_2, α_3, ..., α_n leurs valeurs initiales,

$$
(4)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\quad= \mathrm{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\\
&\qquad+\sum\int_{\alpha_1}^{x_1}\frac{\partial\,\mathrm{F}(x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1}\,dx_1\\
&\qquad+\sum\int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2}\frac{\partial^2\mathrm{F}(x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2\\
&\qquad+\sum\int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2}\int_{\alpha_3}^{x_3}\frac{\partial^3\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3+\ldots\\
&\qquad-\sum\int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2}\cdots\int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \alpha_n)}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_{n-1}}\\
&\qquad\qquad\qquad\times dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\\
&\qquad+\sum\int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_3}^{x_2}\cdots\int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}}\int_{\alpha_n}^{x_n}\frac{\partial^{n}\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_{n-1}\,\partial x_n}\\
&\qquad\qquad\qquad\times dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\,dx_n.
\end{aligned}\right.
$$

Dans cette formule, le premier terme est, comme dans la formule (1), la valeur initiale de la fonction; le second terme est la somme des intégrales des n dérivées premières prises par rapport aux n variables respectivement, les variables qui ne varient pas dans ces intégrales ayant leurs valeurs initiales; le troisième terme est la somme des $\frac{n(n-1)}{1.2}$ intégrales doubles portant sur les $\frac{n(n-1)}{1.2}$ dérivées rectangles, où les variables par rapport auxquelles on intègre varient seules et où les autres variables ont leurs valeurs initiales.

D'une manière générale, cette formule se compose de la valeur initiale de la fonction et des intégrales p^{uples} des dérivées d'ordre p de F $(p = 1, 2, \ldots, n)$, chaque dérivation n'étant faite qu'une fois par rapport à la même variable, l'intégration étant faite par rapport aux variables de dérivation et les autres variables ayant leurs valeurs initiales.

Une application immédiate de cette formule est l'intégration méthodique des différentielles totales.

La différentielle totale d'ordre un

$$dF = \sum_p \frac{\partial^2 F(x_1 . x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p} d_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

s'intègre immédiatement par la formule, car ayant les n dérivées partielles premières, qui sont données dans dF, on obtient les autres dérivées qui entrent dans la formule (4) par des dérivations successives des premières. L'intégrale de dF ne contient qu'une arbitraire, $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer la différentielle totale seconde

$$d^2F - \sum \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p^2} dx_p^2$$
$$+ 2\sum \frac{\partial^2 F(x_1 . x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q.$$

On ne connaît pas alors les dérivées premières, mais seulement les dérivées secondes; il est vrai qu'on peut trouver les dérivées premières; mais nous allons transformer la formule (4) de manière qu'il ne soit pas nécessaire de les chercher.

Prenons d'abord le cas de deux variables :

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}dy + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}dx\,dy.$$

La formule (1) donne

$$\frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x,y_0)}{dx^2}dx,$$

$$\frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0} + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x_0,y)}{dy^2}dy,$$

et, par conséquent,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x,y) = {} & F(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0} + (y-y_0)\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0} \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x,y_0)}{\partial x^2}dx^2 \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x_0,y)}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne une intégration méthodique de la différentielle seconde d^2F, c'est-à-dire permet de trouver la fonction F lorsqu'on connaît ses trois dérivées secondes.

On voit qu'il y a trois constantes d'intégration

$$F(x_0,y_0),\quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0},\quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

Dans le cas d'une fonction de n variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dont on donne la différentielle totale seconde, c'est-à-dire toutes les dérivées d'ordre deux, on remplacera de même dans la formule (4) les n dérivées premières par leurs valeurs obtenues en fonction des dérivées secondes au moyen de la formule (1) :

$$\frac{\partial F(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1^2}\, dx_1.$$

On aura ainsi une formule donnant $F(x_1, \ldots, x_n)$ au moyen des $\frac{n(n+1)}{1.2}$ dérivées données et de dérivées qu'on obtient par dérivations successives des dérivées rectangles données. Les constantes arbitraires dans l'intégration indéfinie sont les valeurs initiales de la fonction et de ses n dérivées premières; leur nombre est donc $n+1$.

Supposons maintenant qu'on donne une différentielle totale d'ordre trois, c'est-à-dire toutes les dérivées d'ordre trois d'une fonction

$$\begin{aligned} d^3F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & \sum \frac{\partial^3 F(x_1, \ldots . x_n)}{\partial x_1^3}\, dx_1^3 \\ & + 3\sum \frac{\partial^3 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^2\, \partial x_2}\, dx_1^2\, dx_2 \\ & + 6\sum \frac{\partial^3 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \end{aligned}$$

Nous remplacerons la formule (4) par une formule ne contenant plus que les dérivées d'ordre trois données et des dérivées d'ordre supérieur que l'on tire des dérivées données par dérivations successives; nous écrirons, au moyen de la formule (1),

$$\frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p}$$
$$= \frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p} + \frac{x - x_1}{1} \frac{\partial^2 F(\alpha_1. \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial^2 \alpha_p}$$
$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial^3 x_p} dx_p^2$$

et, au moyen de la formule (2),

$$\frac{\partial^2 F(\alpha_1. \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p \partial x_q}$$
$$= \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q}$$
$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial \alpha_q} dx_p$$
$$+ \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_p^2} dx_q$$
$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^4 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial x_q^2} dx_p dx_q$$
$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Remplaçant, dans la formule (4), les dérivées premières et secondes par ces valeurs [1], on n'aura plus que des intégrales multiples portant sur les dérivées

---

[1] On pourrait écrire aussi :

$$\frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p \partial x_q}$$
$$= \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \alpha_n)}{\partial \alpha \partial \alpha_q}$$
$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1 \ldots, \alpha_{p-1}, x, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial \alpha_q} dx_p$$
$$+ \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, x_p, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p \partial x_q^2} dx_q,$$

ce qui diminue le nombre des intégrations à faire.

troisièmes données et des dérivées d'ordre supérieur.

Les autres termes sont :

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \sum_p \frac{x_p - \alpha_p}{1} \partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[\sum_p (x_p - \alpha_p)^2 \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)}{\partial \alpha_p^2} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{p,q} (x_p - \alpha_p)(x_q - \alpha_q) \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q} \right]$$

$$(p, q = 1, 2, \ldots, n, p \neq q).$$

Il y a donc $\left[1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\right]$ constantes arbitraires dans l'intégrale indéfinie de la différentielle totale du troisième ordre d'une fonction de n variables ; ce sont les valeurs initiales de la fonction, de ses n dérivées premières et de ses $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées secondes.

Par l'exemple précédent, on voit que, pour intégrer une différentielle totale d'ordre m quelconque, on aura à remplacer dans la formule (4) les dérivées d'ordre inférieur à m par leurs valeurs calculées de proche en proche et exprimées au moyen des dérivées d'ordre supérieur ou égal à m. L'intégration de la différentielle reviendra alors à effectuer les intégrales de la formule obtenue, intégrales d'ordre m ou d'ordre supérieur, portant sur les dérivées d'ordre m et d'ordres supérieurs.

Les constantes arbitraires de l'intégrale indéfinie sont les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées d'ordres 1, 2, ..., $m - 1$. En désignant par D_n^p le nombre des combinaisons avec répétition de n objets p à p, le nombre des arbitraires sera

$$1 + D_n^1 + D_n^2 + \ldots + D_n^{m-1}.$$

La formule (4) que nous avons démontrée, en supposant que la formule (1) était applicable à la fonction et à ses dérivées lorsqu'une seule variable varie, est vraie dans tous les cas, c'est-à-dire lorsque les variables sont réelles ou imaginaires et lorsque la fonction a ou n'a pas de points critiques ; la supposition que nous avons faite peut alors, en effet, être faite également, sauf certaines restrictions sur le chemin suivi par chaque variable, qui demandent une étude approfondie des valeurs des variables qui forment des systèmes *critiques* pour la fonction.

Si l'on énonce le théorème de Cauchy sous cette forme, qui donne des démonstrations fort simples de théorèmes importants (tels que la décomposition d'une fonction en facteurs primaires en considérant le logarithme de cette fonction), en l'appliquant non seulement aux pôles de la dérivée, mais à tous les points critiques de la fonction :

L'intégrale de la fonction $\frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}$, *prise le long d'un contour fermé renfermant un seul point critique et ne passant par aucun point critique de* $\mathrm{F}(x)$, *donne, au retour de la variable au point* x *de départ, la différence au point* x *des valeurs de deux des fonctions en lesquelles se décompose* $\mathrm{F}(x)$, *différence qui est nulle au point critique considéré.*

Ce théorème, qui est une conséquence de l'identité

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}\,dx.$$

sous certaines conditions de continuité de variation de la variable et de la fonction, peut être étendu, par le moyen de notre formule, aux fonctions de plusieurs variables; car notre formule fournit une intégration méthodique de la différentielle totale et donne, par conséquent, le moyen de calculer la différence

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

et, par suite, la différence des valeurs au même point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de deux des fonctions en lesquelles se décompose la fonction F.

C'est sous ce seul point de vue, croyons-nous, que le théorème de Cauchy peut être étendu aux fonctions de plusieurs variables et donner pour celles-ci les nombreuses applications qu'on en a faites dans le cas d'une seule variable, telles que, par exemple, la décomposition d'une fonction en un produit de facteurs primaires.

Nous nous contentons d'indiquer dans cette Note cette application de notre formule, et cette interprétation du théorème de Cauchy, car leur démonstration exige, au préalable, une étude approfondie des systèmes critiques des fonctions de plusieurs variables.

D'une manière générale, notre formule est destinée à prendre, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, la place que prend la formule

$$F(x) - F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{d\,F(x)}{dx}\,dx$$

dans la théorie des fonctions d'une seule variable.