GEORGES BROCARD

Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 293-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__293_0>

[P1b]

SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES PLANES;

PAR M. GEORGES BROCARD,
Professeur au lycée du Havre (1).

1. Considérons, dans la figure primitive, un triangle CAB et effectuons une transformation homographique telle que les points cycliques deviennent réels tout en restant à l'infini; soient, dans la transformée, ci et cj les droites joignant le point c à ces deux points à l'infini et c', c'' les points où elles rencontrent le côté ab, et soit enfin c''_1 le symétrique de c'' par rapport au milieu d de ab. On sait que le rapport anharmonique $(c'c''_1\,ab)$ est égal à $\frac{\text{CA}^2}{\text{CB}^2}$. Il en résulte que l'on a

$$\frac{c'a}{c'b}\times\frac{c''_1 b}{c''_1 a}=\frac{\text{CA}^2}{\text{CB}^2}$$

ou encore

$$\frac{c'a_1.ac''}{c'b_1.bc''}=\frac{\text{CA}^2}{\text{CB}^2}=\frac{ac'_1.ac''}{bc'_1.bc''}.$$

Si donc on a, dans la figure primitive, une relation homogène entre CA et CB, elle se transformera en une autre relation que l'on obtiendra en remplaçant, dans la première, CA^2 par le produit des projections de ac sur ab faites successivement suivant des parallèles à ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

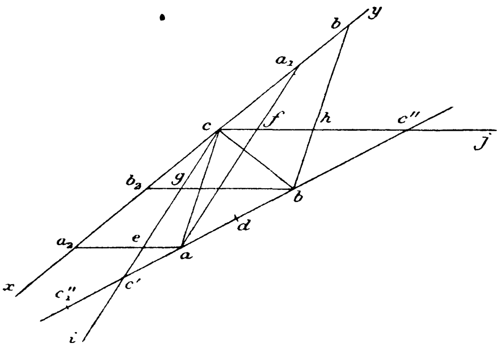
On peut remarquer que, si l'on a CA = CB, il en ré-

(1) *Voir* t. XV, p. 426.

sultera que les points c' et c'' seront symétriques par rapport à d.

Plus généralement, soit xy une droite quelconque, et

Fig. 1.



a_1, a_2, b_1, b_2 les points de rencontre de cette droite avec les parallèles à ci et cj, menées par a et b. On a évidemment

$$\frac{ac'}{bc'} = \frac{a_1c}{b_1c}, \qquad \frac{ac''}{bc''} = \frac{a_2c}{b_2c};$$

d'où

$$\frac{ac'.ac''}{bc'.bc''} = \frac{ca_1.ca_2}{cb_1.cb_2}.$$

On peut donc, dans la relation donnée, remplacer CA^2 par le produit des projections de ca sur une droite quelconque, faites successivement suivant des parallèles à ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

Enfin, on a aussi

$$\frac{ca_1}{cb_1} = \frac{cf}{ch}, \qquad \frac{ca_2}{cb_2} = \frac{ce}{cg};$$

d'où

$$\frac{ca_1.ca_2}{cb_1.cb_2} = \frac{ce.cf}{ch.cg}.$$

On peut donc encore remplacer CA^2 par le produit des projections de ca sur ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

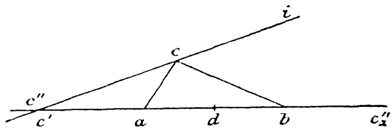
Ces considérations permettent de déduire très simplement, de toute relation métrique relative à une circonférence, une relation analogue relative à l'hyperbole. Supposons, par exemple, que, dans la figure primitive, AB soit un diamètre d'une circonférence passant par C. Dans la transformée, ab sera un diamètre d'une hyperbole passant par c, et la relation $CA^2 + CB^2 = AB^2$ donnera le théorème suivant :

Le produit des projections de ac sur ab, faites parallèlement aux deux asymptotes, augmenté du produit des projections de bc, est égal à ab^2.

2. Supposons maintenant que, dans la transformée, les deux points cycliques soient transformés en deux points à l'infini réels et confondus.

Soient ci la droite qui joint le point c à ces deux points

Fig. 2.



confondus; c', c'' les deux points confondus où elle rencontre ab, et c''_1 le symétrique de c'' par rapport au milieu d de ab. La relation $(c'c''_1 ab) = \frac{CA^2}{CB^2}$ devient

$$\frac{c'a}{c'b} \times \frac{c''_1 b}{c''_1 a} = \left(\frac{ac'}{bc'}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2}.$$

Il suffira donc, pour transformer une relation homogène entre CA et CB, de les remplacer par leurs projections sur ab (ou sur une droite quelconque), faites parallèlement à ci.

Il est facile de déduire de cette façon, de toute propriété métrique de la circonférence, une propriété analogue de la parabole.

Exemple. — Étant données deux paraboles homothétiques, si par le centre d'homothétie on mène une sécante quelconque, et que l'on projette sur une tangente commune, parallèlement à la direction des axes, les segments compris entre le centre d'homothétie et deux points antihomologues situés sur cette sécante, le produit des deux projections obtenues est constant.

On peut obtenir un théorème analogue relatif à deux hyperboles homothétiques; seulement, l'un des segments devra être projeté suivant une parallèle à l'une des asymptotes, et l'autre, suivant une parallèle à l'autre asymptote.

Remarque. — Le produit des projections d'une longueur sur les deux asymptotes, faites suivant des parallèles à ces asymptotes, représente, à un facteur constant près, l'aire du parallélogramme ayant cette longueur pour diagonale et ses côtés respectivement parallèles aux deux asymptotes, cette aire étant affectée d'un signe convenable.

Toute relation homogène entre les longueurs de certaines lignes droites de la première figure peut donc être transformée en une relation analogue entre les aires des parallélogrammes ayant pour diagonales les lignes droites correspondantes de la deuxième figure, et leurs côtés parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole.

Exemples. — Les parallélogrammes construits sur deux tangentes issues d'un même point sont équivalents.

Soient a, b les extrémités d'un diamètre d'une hyperbole, et C un point quelconque de cette courbe : la somme algébrique des aires des parallélogrammes construits sur *ca* et *cb* comme diagonales est constante.