Nouvelles annales de mathématiques

Paul Appell

Développement en séries trigonométriques des polynômes de M. Léauté

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 265-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__265_1>

[D1b]

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DES POLYNOMES DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. PAUL APPELL.

Pour exprimer une fonction $f(x)$, connaissant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans un intervalle donné, de $-h$ à $+h$, par exemple, M. Léauté (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, 1881) a considéré une suite de polynomes P_0, P_1, P_2, ..., P_n de degrés 0, 1, 2, .., n en x, possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$

$$\frac{dP_n}{dx} = P_{n-1}, \qquad n \geqq 1; \tag{2}$$

$$\int_{-h}^{+h} P_n\, dx = 0, \qquad n \geqq 1. \tag{3}$$

La relation (2) permet de déduire chaque polynome du précédent par une quadrature, et la condition (3) détermine la constante arbitraire introduite par cette quadrature.

Ces polynomes P_n sont homogènes et de degré n en x et h. Mettons ces deux quantités en évidence en appelant le polynome

$$P_n(x, h).$$

Nous ramènerons h à avoir la valeur π, en faisant

$$x = \frac{hx'}{\pi};$$

on a alors

$$P_n(x, h) = P_n\left(\frac{h}{\pi}x', h\right) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi)$$

Les polynomes $P_n(x', \pi)$ possèdent donc les propriétés caractéristiques suivantes

$$P_0 = 1, \qquad \frac{dP_n}{dx'} = P_{n-1}, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} P_n\, dx' = 0, \qquad n \geqq 1.$$

Le polynome P_1 est égal à x'. On sait que dans les limites $-\pi$ et $+\pi$, x' peut être représenté par la série trigonométrique

$$(4)\qquad P_1 = x' = 2\left(\sin x' - \frac{1}{2}\sin 2x' + \frac{1}{3}\sin 3x' - \ldots\right)$$

(*voyez* Bertrand, *Calcul intégral*, n° 531).

On a ainsi le développement de P_1 entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour avoir celui de P_2, multiplions par dx' les deux membres de (4) et intégrons; il vient

$$P_2 = c_2 - 2\left(\cos x' - \frac{1}{4}\cos 2x' + \frac{1}{9}\cos 3x' - \ldots\right),$$

où c_2 est une constante d'intégration, car P_2 est une fonction primitive de P_1. Pour déterminer c_2, écrivons

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_2\, dx' = 0.$$

Nous aurons, en remplaçant P_2 par la série et remarquant que tous les termes $\cos x'$, $\cos 2x'$, ... ont leurs intégrales nulles,

$$2\pi c_2 = 0, \qquad c_2 = 0,$$

donc

$$(5) \quad P_2 = -2\left(\cos x' - \frac{1}{2^2}\cos 2x' + \frac{1}{3^2}\cos 3x' - \ldots\right).$$

Intégrant de nouveau et déterminant de même la constante d'intégration par la condition

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_3\, dx' = 0,$$

on trouve qu'elle est nulle, et l'on a

$$(6) \quad P_3 = -2\left(\sin x' - \frac{1}{2^3}\sin 2x' + \frac{1}{3^3}\sin 3x' - \ldots\right);$$

et ainsi de suite. En général, m étant un entier positif,

$$P_{2m} = (-1)^m 2\left(\cos x' - \frac{1}{2^{2m}}\cos 2x' + \frac{1}{3^{2m}}\cos 3x' - \ldots\right),$$

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2\left(\sin x' - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin 2x' + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3x' - \ldots\right).$$

Ces formules donnent, en particulier, les valeurs asymptotiques des polynomes P_n pour n très grand.

Si l'on revient à la variable x, on a

$$x' = \frac{\pi x}{h},$$

$$P_n(x, h) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi).$$

Donc, pour n pair, $n = 2m$,

$$P_{2m} = (-1)^m 2\frac{h^{2m}}{\pi^{2m}}\left(\cos\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m}}\cos\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m}}\cos\frac{3\pi x}{h} - \ldots\right),$$

et pour n impair, $n = 2m + 1$,

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2\frac{h^{2m+1}}{\pi^{2m+1}}\left(\sin\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin\frac{3\pi x}{h} - \ldots\right).$$

Ces développements font ressortir les rapports signalés par M. Halphen entre les polynomes de M. Léauté et les polynomes de Bernoulli.

Ils se rattachent également à deux questions posées par M. Cesàro dans l'*Intermédiaire* (mars 1897), questions 1019 et 1017.

Faisons, en effet, $h = 1$, et désignons par $\varphi_{2m}(x)$ et $\varphi_{2m+1}(x)$ les deux séries ci-dessus

$$\varphi_{2m}(x) = \cos\pi x - \frac{1}{2^{2m}}\cos 2\pi x + \frac{1}{3^{2m}}\cos 3\pi x - \ldots,$$

$$\varphi_{2m+1}(x) = \sin\pi x - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin 2\pi x - \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3\pi x - \ldots.$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}&\varphi_{2m}(x) - \varphi_{2m}(x+1)\\ &\quad = 2\left(\cos\pi x + \frac{1}{3^{2m}}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^{2m}}\cos 5\pi x + \ldots\right).\end{aligned}$$

C'est la série considérée par M. Cesàro dans la question 1019.

De même

$$\begin{aligned}&\varphi_{2m+1}(x) - \varphi_{2m+1}(x-1)\\ &\quad = 2\left(\sin\pi x + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3\pi x - \frac{1}{5^{2m+1}}\sin 5\pi x + \ldots\right).\end{aligned}$$