F. SARTIAUX

Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1863

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 232-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__232_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1863 (1);

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. F. SARTIAUX,
Élève à l'École Lacordaire.

On donne sur un plan deux circonférences C *et* C'; *d'un point* A *de* C *on mène des tangentes à* C', *on joint les points de contact de ces tangentes; cette droite coupe la tangente menée en* A *à la circonférence* C *en un point* M. *On demande l'équation du lieu décrit par* M *lorsque* A *parcourt la circonférence* C.

Examiner les différentes formes du lieu selon la grandeur et les positions relatives des circonférences C *et* C'.

Indiquer les cas où il se décompose; faire voir que le lieu des points M *est tangent à la circonférence* C *en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence* C'.

Les cercles C et C' définissent un faisceau de cercles. Or, on sait que les polaires d'un point A par rapport à tous les cercles de ce faisceau se coupent au même point M. C'est, en somme, le lieu de ce point M, quand A décrit le cercle C, que l'on cherche.

Ce point M peut être considéré comme le point d'intersection de la tangente en A au cercle C, avec la polaire du point A, par rapport au cercle du faisceau composé de l'axe radical Δ des circonférences C et C' et

(1) *Voir* t. III, 2e série, p. 268; 1864.

de la droite de l'infini. Il est donc, sur chaque tangente mobile à la circonférence C, le point symétrique du point de contact A, par rapport au point d'intersection de cette tangente avec l'axe radical. On a donc ainsi une génération simple du lieu ([1]).

Les points du lieu à l'infini sont ceux pour lesquels la tangente au cercle est parallèle à la polaire du point A, par rapport à l'axe radical Δ et à la droite de l'infini. Ils se trouvent donc sur une parallèle à Δ. On voit facilement que les asymptotes sont les symétriques, par rapport à l'axe radical Δ, des tangentes au cercle C aux extrémités de la ligne des centres, et que la courbe reste toujours dans la région du plan comprise entre ces droites.

Il n'y a évidemment pas de points réels sur la ligne des centres quand Δ coupe réellement le cercle C. Dans ce cas, le lieu passe par les points d'intersection de C et de Δ. Appelons S un de ces points. Quand A vient en S, le point M arrivant aussi en ce point, la tangente en S à la courbe, lieu des points M, est la position limite de SM quand A vient en S. La droite SM, Δ, la droite SA et la parallèle à MA, menée de S, forment un faisceau harmonique. Lorsque A vient en S, la droite SA et cette parallèle coïncident avec la tangente en S à C : il en est donc de même de SM. Ainsi : le lieu de M est tangent à C en S ([2]).

([1]) On peut dire aussi : le centre radical de C, C' et de A, considéré comme un cercle de rayon nul, est à la rencontre de Δ et de AM. Étant aussi sur l'axe radical de A et de C', il est le milieu du segment AM ; donc, etc.

([2]) On peut aussi arriver à ce résultat en faisant usage d'infiniment petits, ou encore en appliquant la construction de la normale en un point quelconque du lieu considéré comme étant engendré par un point d'une figure mobile de grandeur invariable. Il est facile de

Quand Δ ne coupe pas réellement le cercle C, les points limites du faisceau des cercles sont réels, et un point du lieu est sur l'une et l'autre des polaires de A par rapport à ces cercles limites. Donc le lieu passe par ces points. Celui qui est à l'intérieur de C est un point isolé du lieu; la sécante, qui passe par l'autre, restant constamment perpendiculaire à la droite qui le joint au point mobile A, a pour positions limites, quand M se confond avec ce point limite, les perpendiculaires aux tangentes issues de ce point au cercle C. Ces perpendiculaires sont donc les tangentes au point double du lieu.

On a donc deux formes du lieu : l'une à points doubles imaginaires ne coupant pas la ligne des centres, l'autre à points doubles réels sur celle-ci.

Le lieu ne dépendant que de la position relative de C et de Δ, il n'y aura de cas particulier que quand Δ sera tangente au cercle C. Les points limites sont alors confondus au point de contact de Δ et de C. Quand le point A vient en ce point de contact, le point d'intersection de ses polaires par rapport aux cercles du faisceau est indéterminé sur la tangente Δ. Donc la droite Δ fait partie du lieu. Le reste du lieu, engendré comme précédemment, a pour asymptote unique la symétrique par rapport à Δ de la tangente au cercle C à l'extrémité de la ligne des centres. Le point de contact est un point double du lieu, et les tangentes en ce point étant les perpendiculaires issues de lui à la circonférence, sont confondues avec la ligne des centres. Donc c'est un point de rebroussement. On voit facilement que le lieu est une cissoïde droite engendrée, d'après la construction

---

trouver cette génération, qui est tout à fait analogue à celle donnée par Newton pour la cissoïde.

connue, par un point pris sur une sécante mobile autour du point de contact de C et de Δ, à partir du point d'intersection de cette sécante avec le cercle tangent au cercle C, au point de contact de Δ avec C, et décrit sur le segment de la ligne des centres compris entre Δ et l'asymptote comme diamètre.

Le lieu se composant d'une cissoïde et d'une droite est donc du quatrième degré.

On le voit d'ailleurs directement en remarquant que sur une droite passant par l'un des points limites du faisceau, il y a deux points du lieu correspondant aux deux points A d'intersection de la perpendiculaire menée par ce point à la droite considérée avec le cercle C, puisque cette droite est la polaire par rapport au point limite de ces points A. Le point limite étant un point double du lieu, il y a quatre points du lieu sur une droite ; il est donc du quatrième degré.

De plus, tous les cercles du faisceau passant par les deux points cycliques du plan, les polaires de ces points par rapport à ces cercles se coupent en ces points mêmes. Donc le lieu est circulaire.

Ces résultats montrent que, dans le cas de décomposition, le lieu est une cubique circulaire à point de rebroussement, donc une cissoïde, et que les tangentes au lieu, dans le cas général, aux points d'intersection de C et de Δ, sont les tangentes au cercle C ; puisque, d'après le mode de génération, le lieu ne peut pénétrer dans le cercle C, ni avoir en ces points des rebroussements, puisque la droite Δ, le coupant déjà en deux points à l'infini, le couperait en quatre autres points.