H.-A. SCHWARZ

Sur certains problèmes de représentation conforme

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 200-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__200_1>

D5cα]

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE REPRÉSENTATION CONFORME;

PAR M. H.-A. SCHWARZ,

Membre de l'Académie royale des Sciences de Berlin,
Membre correspondant de l'Institut.

(Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.)

(Extrait d'une Communication à M. Richelot, de Kœnigsberg. *Journal de Crelle*, t. 70, p. 105-120, février 1869. Reproduit dans le t. II des *Gesammelte Math. Abhandlungen* de M. Schwarz; Berlin, Springer; 1890).

Le fait, que l'intelligence de la plupart des travaux de *Riemann* ne fut accessible au début qu'à un petit cercle de lecteurs, tient, je le croirs volontiers, à ce que *Riemann* a négligé, dans la publication de ses recherches générales, d'expliquer complètement la nature spéciale de ses méthodes de traitement à l'aide d'une exposition détaillée d'exemples particuliers.

Il en est aussi de même de ce théorème établi dans le n° 21 de la *dissertation inaugurale* de *Riemann*, qui m'a suggéré l'idée générale de traiter certains problèmes de représentation conforme, et qui nous enseigne : qu'il est possible de représenter l'aire d'une figure simplement connexe sur l'aire d'un cercle, en conservant la similitude dans les parties, et cela *d'une seule et unique manière,* telle qu'au centre du cercle corresponde un point intérieur quelconque donné de la figure et, à un point quelconque de la circonférence, un point quelconque donné du contour de la figure.

M. *Mertens,* qui suivait en même temps que moi, pendant le semestre d'hiver 1863-64, les leçons de M. *Weierstrass* sur la théorie des fonctions analytiques, attira à cette occasion mon attention sur cette circonstance caractéristique que *Riemann* avait, d'une manière générale, démontré l'existence d'une fonction qui, par exemple, permet de pratiquer la représentation conforme de l'aire d'un triangle rectiligne plan sur l'aire d'un cercle, tandis que la détermination explicite d'une telle fonction semblait encore, à cause des discontinuités du contour situées aux sommets, dépasser les forces de l'analyse.

Je ne connaissais alors aucun cas particulier d'une aire à contour assigné pour lequel le problème de la représentation conforme de cette aire sur celle d'un cercle eût été mené à bonne fin.

Ayant, comme particularisation de la figure à représenter d'une manière conforme sur l'aire d'un cercle, choisi celle dont le contour est formé par des lignes droites et plus spécialement par les côtés d'un *carré,* je crois avoir découvert un cas particulier du problème général, cas dont la solution complète même dans cette spécialisation aurait une valeur scientifique et qui serait également bienvenue, comme illustration intuitive du n° 21 de la dissertation de *Riemann*.

On est conduit à la solution de ce problème, ainsi qu'à celle de bien d'autres problèmes de représentation conforme, par le fécond theorème qui suit :

Lorsque, pour une fonction analytique, à une succession continue de valeurs réelles de l'argument complexe, correspond une succession continue de valeurs réelles de la fonction, alors, à chaque couple de valeurs conjuguées de l'argument correspondent des valeurs conjuguées de la fonction.

Sur le plan (u) dont les points représentent géométriquement les valeurs d'une grandeur complexe u, délimitons une région U' simplement connexe, dont le contour est en partie formé par un segment fini l de l'axe des quantités réelles dans le plan (u).

Soit $t = f(u)$ une fonction analytique de l'argument complexe u, uniforme par définition, et possédant le caractère d'une fonction entière pour toutes les valeurs de u appartenant à l'intérieur de U'; c'est-à-dire que, u_0 désignant une valeur quelconque de u, appartenant à l'intérieur de la région U', la fonction $f(u)$ sera pour les valeurs de u, situées dans le domaine de ce point u_0, développable en une série procédant suivant les puissances de la grandeur $u - u_0$, dont les exposants sont des nombres entiers positifs, série convergente pour toutes les valeurs de $u - u_0$ suffisamment petites en valeur absolue. On admettra par hypothèse que lorsque u se rapproche indéfiniment du contour, la valeur de t reste toujours finie et est réelle pour tous les points de la ligne l et que pour toutes les valeurs de l'argument u appartenant à l'intérieur de la région U′ et à son contour, la valeur de la fonction $t = f(u)$ varie d'une manière continue avec la valeur de l'argument u.

A la région U′ correspond une région U″ dont les points sont les symétriques de ceux de U′, par rapport à l'axe des quantités réelles.

Pour tous les points de la région U″, une fonction analytique t sera donc définie par ce fait que, dans les régions U′ et U″, aux valeurs conjuguées de la grandeur u sont associées des valeurs conjuguées de la grandeur t. Si l'on conçoit les deux régions U′ et U″ raccordées entre elles le long du segment de droite l, on est en présence d'une région simplement connexe U′ + U″. Pour toutes les valeurs de l'argument u appartenant à l'intérieur de cette région, la valeur de la grandeur t est, par définition, uniforme ([1]) et de plus, pour les valeurs de u appartenant à l'intérieur de U′ ainsi qu'à l'intérieur de U″, elle est définie comme fonction analytique de cet argument et celle-ci possède le caractère d'une fonction entière. A la traversée de la ligne l et le long de cette ligne la valeur de t varie d'une manière continue. De ceci l'on conclut que la fonction t définie pour la région U″ est un prolongement analytique de la fonction définie pour la région U′ et qu'elle est un prolongement analytique de cette dernière au delà de la ligne l. L'exactitude de cette affirmation sera démontrée, comme il suit, au cas où, comme il est permis de le supposer, la région U′ + U″ recouvre partout le plan (u) seulement d'une manière simple ([2]).

Si l'on désigne par u_0 une valeur de u, appartenant

([1]) *i. e* : uni-déterminative, univoque. L. L.

([2]) *i. e* : la région est formée par une surface à un seul feuillet. L. L.

à l'intérieur de U', alors, d'après un théorème de *Cauchy*, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

lorsqu'elle est prise, dans le sens positif, le long du contour de la région U' ou bien lorsqu'elle est prise le long de celui de la région U'', a dans le premier cas la valeur $f(u_0)$, dans le second la valeur o. Lorsque l'on ajoute entre elles ces deux intégrales, les chemins d'intégration qui sont alors parcourus le long de l deux fois et en sens contraire se détruisent et l'équation

$$f(u_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

où l'intégrale doit être prise dans le sens positif le long du contour de la région U' + U'', représente, pour toutes les valeurs de la grandeur u_0, qui sont représentés géométriquement par les points appartenant à l'intérieur de cette région, une fonction continue de cet argument dont les valeurs coïncident partout avec celles de la fonction $t = f(u)$.

De là résulte que la fonction ainsi définie possède aussi pour toutes les valeurs de u, appartenant au segment l, le caractère d'une fonction entière.

Par conséquent, sous les hypothèses adoptées, à des valeurs conjuguées de l'argument correspondent des valeurs conjuguées de la fonction, ou bien, si nous employons le langage de la Géométrie : la représentation conforme du plan (u) sur le plan (t), dont les points représentent géométriquement les valeurs de la grandeur complexe t, est symétrique pour les deux plans par rapport aux axes des quantités réelles ; à des points symétriques correspondent des points symétriques, images des premiers.

Si maintenant l'on pratique les prolongements analytiques de la fonction $t = f(u)$ symétriquement des deux côtés de l'axe des quantités réelles sur le plan (u), l'on arrive à ce résultat que les points singuliers, quelle que soit leur nature, sont ou bien situés séparément sur l'axe des quantités réelles, ou bien situés symétriquement par paires de part et d'autre de cet axe.

Cette proposition peut s'étendre directement au cas où, dans la représentation par l'entremise d'une fonction analytique, à un segment de droite situé dans la région de l'argument ou formant une partie du contour de ladite région correspond encore un segment de ligne droite dans le plan dont les points représentent géométriquement les valeurs de la fonction analytique.

Dans le problème spécial de la représentation conforme de l'aire d'un carré sur celle d'un cercle, il était donc à présumer que, lorsque l'on prescrit que le centre du cercle doit correspondre au centre du carré, les images des quatre droites qui sont les axes de symétrie du carré pourraient être aussi des lignes droites. Cette considération fournit la position des quatre points singuliers situés sur le contour du cercle qui correspondent dans le cas de ces données spéciales aux quatre sommets du carré.

Maintenant il saute aux yeux que la solution du problème en question peut être simplifiée en remplaçant l'aire du cercle par la surface d'un demi-plan que l'on peut déduire de l'aire du cercle au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques; à vrai dire la simplification introduite ainsi tient à ce fait qu'alors les contours de deux régions dont on doit pratiquer l'une sur l'autre la représentation conforme sont tous deux rectilignes.

D'après la loi générale donnée précédemment, la fonction par l'entremise de laquelle est praticable la représentation conforme peut donc être prolongée analytiquement au delà de la région intérieure du carré pour laquelle elle est primitivement supposée définie.

Si l'on choisit comme centre de la transformation l'un des points singuliers sur le contour du cercle, on reconnaît que les points de l'axe des quantités réelles

$$t = \infty, \qquad t = -1, \qquad t = 0, \qquad t = +1$$

peuvent être pris comme points singuliers, tandis que le demi-plan situé du côté positif de l'axe des quantités réelles sera la représentation conforme de l'aire du cercle.

Lorsque la position d'un point à l'intérieur du carré donné est déterminée par la valeur de la grandeur complexe u, alors le problème en question exige que la variable t, pour toutes les valeurs de la grandeur u qui correspondent aux points situés à l'intérieur du carré donné, soit définie comme fonction analytique uniforme de l'argument u, possédant le caractère d'une fonction entière et ayant des valeurs réelles pour les valeurs de l'argument u qui correspondent aux points situés sur le contour du carré.

Maintenant, d'après la loi donnée précédemment, la région de l'argument u peut être d'abord étendue aux aires de quatre carrés contigus au carré donné et situés symétriquement par rapport à ce carré et peut ainsi, par répétition successive, être encore étendue à une région aussi grande que l'on veut du plan (u).

On reconnaît ainsi que la fonction t doit de même, pour cette extension du domaine de son argument, être une fonction uniforme pour toutes les valeurs finies de l'argument u, et que, de plus, c'est une fonction doublement périodique de u, le rapport des deux périodes fondamentales étant égal à $\sqrt{-1}$.

On est donc ainsi en présence des fonctions lemniscatiques.

Le contour du carré a des points singuliers en ses quatre sommets. Ces points doivent être exceptés de la condition que l'aire du carré doit être représentée en conservant la similitude en les plus petites parties sur l'aire du cercle ou sur celle du demi-plan, car, autrement, le problème proposé renfermerait une condition impossible à remplir.

Chaque portion de l'aire du carré située dans le voisinage d'un des sommets dudit carré, portion de surface angulaire plane d'ouverture de 90°, voisine du sommet de l'angle, doit être représentée, par l'entremise de la fonction qui fournit la représentation, sur une surface angulaire plane d'ouverture de 180°.

On est donc en présence de ce problème : Trouver la fonction la plus générale par l'entremise de laquelle une portion de surface angulaire d'ouverture $\alpha\pi$ sur le plan (u)

$$u = re^{i\varphi}, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \alpha\pi, \qquad 0 < r < r_0,$$

située dans le voisinage du sommet $u = 0$, est représentée d'une manière conforme sur le plan

$$t = \rho e^{\psi i}, \qquad 0 \leqq \psi \leqq \pi,$$

de telle sorte qu'entre les limites assignées, à chaque point $u = re^{\varphi i}$, corresponde un point $t = \rho e^{\psi i}$ se déplaçant avec le premier d'une manière continue, pendant que l'on a les valeurs respectives correspondantes

$$r = 0, \qquad \rho = 0; \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0; \qquad \varphi = \alpha\pi, \qquad \psi = \pi.$$

La fonction la plus simple par l'entremise de laquelle peut être pratiquée une telle représentation est la fonction

$$v = u^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Chaque autre fonction t de l'argument u, qui permet également de pratiquer une représentation jouissant des propriétés assignées, possède, d'après le théorème précédent, lorsqu'on la regarde comme fonction de la grandeur complexe v, le caractère d'une fonction entière pour la valeur $v = 0$ et pour les valeurs de la grandeur v situées dans le domaine de cette valeur $v = 0$. Et de même, inversement, on reconnaît que la grandeur v est une fonction analytique de l'argument t, qui, pour toutes les valeurs de la grandeur complexe t situées dans le domaine de la valeur $t = 0$, y compris cette dernière valeur, possède le caractère d'une fonction entière.

Par conséquent, on obtient les représentations analytiques suivantes, valables dans les domaines des valeurs $v = 0$ et $t = 0$:

$$v = u^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad t = Cv(1 + a_1 v - a_2 v^2 + \ldots),$$

$$v = \frac{1}{C} t(1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots),$$

$$u = v^{\alpha}, \qquad u = \frac{1}{C^{\alpha}} t^{\alpha}(1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots).$$

La constante C est différente de zéro et positive; les coefficients a, b, c ont tous des valeurs réelles; ce qui tient à ce qu'à toutes les valeurs positives suffisamment petites des grandeurs respectives u et v doivent aussi correspondre des valeurs positives de la grandeur t.

Dans un problème de représentation conforme, la situation et la grandeur absolue de la figure dans le plan (u), sur lequel est pratiquée la représentation conforme d'une figure donnée sur le plan (t), sont en général indifférentes. Cette circonstance introduit dans la solution générale du problème de représentation deux constantes arbitraires qui déterminent la situation et la grandeur absolue susdites. Ainsi si $u = f(t)$ est une fonction par l'entremise de laquelle la figure T dans le plan (t) sera représentée sur une figure U dans le plan (u), alors

$$u' = C_1 u + C_2$$

est une pareille fonction; seulement, la figure correspondante U' dans le plan (u') est située en un autre endroit, et construite suivant une autre échelle et a une orientation différente de celle de la figure U sur le plan (u).

Lorsqu'il s'agit alors de trouver les propriétés caractéristiques de la représentation conforme d'une figure T sur une figure U, on doit donc rechercher une dépendance entre les grandeurs u et t qui soit indépendante de la situation particulière et de la grandeur absolue de la figure U sur le plan (u); c'est-à-dire qu'il s'agit d'établir une équation différentielle dans l'intégrale générale de laquelle les constantes C_1 et C_2 se présentent comme constantes d'intégration.

Or, on a

$$\frac{du'}{dt} = C_1 \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}.$$

Cette fonction, par conséquent, est indépendante de la situation particulière et de la grandeur absolue de la figure U sur le plan (u).

Le passage de u à $\frac{du}{dt}$ et à $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ est un progrès considérable en ce sens qu'alors toutes les valeurs de l'argument t, pour lesquelles la grandeur $\frac{du}{dt}$ est soit infiniment petite soit infiniment grande et pour lesquelles la grandeur $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ est infiniment grande, doivent être regardées comme des valeurs singulières dans le problème de représentation, valeurs pour lesquelles il ne peut donc plus être question de représentation conservant la similitude au sens propre de ces mots.

Dans le cas déjà traité de la représentation conforme d'un angle π sur un angle $\alpha\pi$, on a

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = \frac{\alpha - 1}{t} + d_1 + d_2 t + \ldots.$$

Cette fonction, par conséquent, dans le domaine de la valeur $t = 0$, possède le caractère d'une fonction rationnelle fractionnaire. Les coefficients d_1, d_2, ... ont tous des valeurs réelles et, par conséquent, la valeur de la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$, pour toutes ces valeurs réelles de l'argument t pour lesquelles la série converge, est également réelle.

S'agit-il de pratiquer la représentation conforme d'une figure T du plan (t) sur une région U du plan (u) dont le contour est formé par une ligne simple (c'est-à-dire qui ne passe par aucun point plus d'une fois), région située tout entière à distance finie, on sait alors d'avance que la grandeur $\frac{du}{dt}$ ne peut devenir infiniment petite ni infiniment grande pour aucun point situé à l'intérieur de T et que, par suite, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ doit, pour toutes ces valeurs de l'argument t, posséder le caractère d'une fonction entière.

Dans le cas qui nous occupe les valeurs singulières de la grandeur t, situées à distance finie, sont $t = -1$, $t = 0$, $t = +1$; α est égal à $\frac{1}{2}$. La fonction

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right),$$

qui, pour toutes les valeurs réelles de l'argument t, possède également des valeurs réelles, a, pour toutes les valeurs finies de t dont la partie imaginaire est positive, le caractère d'une fonction entière ; par conséquent cette fonction possède, pour toutes les valeurs finies de t, le caractère d'une fonction entière. Pour les valeurs infiniment grandes de t, on a le développement

$$u - u_\infty = \frac{C' i}{\sqrt{t}}\left(1 + c'_1 \frac{1}{t} + c'_2 \frac{1}{t^2} + \ldots\right),$$

et, par suite,

$$\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{1}{t} + d'_1 \frac{1}{t^2} + d'_2 \frac{1}{t^3} + \ldots;$$

par conséquent, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$, pour toutes les valeurs infiniment grandes de t, devient infiniment petite ; $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ est donc une fonction rationnelle de t et cette fonction est égale à

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right).$$

On obtient alors par intégration

$$\log \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\log 4t(1-t^2) + \log C_1,$$

$$u = C_1 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}} + C_2.$$

On s'aperçoit donc aisément que, par l'entremise de l'intégrale lemniscatique

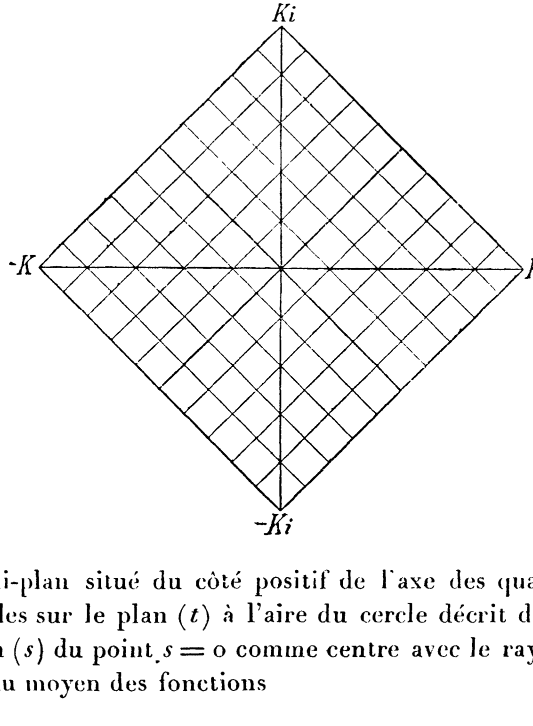
$$u' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}},$$

l'aire de chacun des deux demi-plans, en lesquels est partagé le plan (t) par l'axe des quantités réelles, sera représentée d'une manière conforme sur l'aire d'un carré de côté égal à

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}.$$

Au moyen de la substitution $s = \frac{t-1}{t+1}$ l'on passe du

Fig. 1.



demi-plan situé du côté positif de l'axe des quantités réelles sur le plan (t) à l'aire du cercle décrit dans le plan (s) du point $s = 0$ comme centre avec le rayon 1.

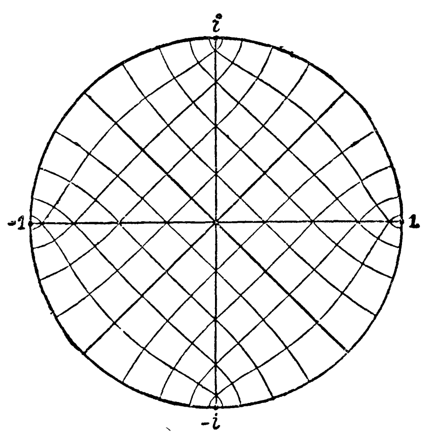
Au moyen des fonctions

$$u = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}, \qquad s = \sin \operatorname{am} u, \qquad (k = \sqrt{-1}),$$

l'aire du cercle situé sur le plan (s), (*fig.* 2), décrit avec le rayon 1 du point $s = 0$ comme centre, et l'aire du carré situé sur le plan (u) et dont les sommets sont K, Ki, $-K$, $-Ki$, avec $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$ (*fig.* 1), sont correspondantes et représentables l'une sur l'autre, la similitude étant conservée en les plus petites parties.

Pour rendre cette représentation intuitive à l'aide de

Fig. 2.



figures, j'ai calculé, avec l'approximation requise pour les valeurs de u formées à l'aide de multiples entiers de $\frac{1}{10}K$ et de $\frac{1}{10}Ki$, les valeurs correspondantes de s d'après lesquelles j'ai dessiné les figures [1].

---

[1] Tableau des valeurs que prend la fonction $\sin\operatorname{am} u$ $(k = \sqrt{-1})$ pour les valeurs $u = \frac{m+ni}{10}K$ formées à l'aide de multiples entiers de $\frac{1}{10}K$ et $\frac{1}{10}Ki$ avec $0 \leqq n \leqq m$, $m + n \leqq 10$.

n											
5						0,7071 $+0,7071\,i$					
4					0,5407 $+0,5407\,i$	0,6978 $+0,5336\,i$	0,8633 $+0,5047\,i$				
3				0,3971 $+0,3971\,i$	0,5366 $+0,3941\,i$	0,6792 $+0,3815\,i$	0,8209 $+0,3525\,i$	0,9537 $+0,3008\,i$			
2			0,2627 $+0,2627\,i$	0,3956 $+0,2617\,i$	0,5291 $+0,2571\,i$	0,6608 $+0,2455\,i$	0,7866 $+0,2235\,i$	0,8995 $+0,1877\,i$	0,9906 $+0,1367\,i$		
1		0,1311 $+0,1311\,i$	0,2624 $+0,1309\,i$	0,3934 $+0,1299\,i$	0,5228 $+0,1268\,i$	0,6481 $+0,1202\,i$	0,7649 $+0,1084\,i$	0,8671 $+0,0903\,i$	0,9476 $+0,0653\,i$	0,9994 $+0,0344\,i$	
0	0	0,1311	0,2621	0,3924	0,5205	0,6436	0,7574	0,8563	0,9335	0,9830	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 m

Au moyen de cette représentation, on obtient l'interprétation géométrique qui suit de ce théorème démontré par *Abel* (¹): la valeur de la grandeur $\sin \operatorname{am} \frac{K}{2^n \pm i}$ et d'une manière générale la valeur de la grandeur

$$\sin \operatorname{am} \frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$$

s'obtient par la résolution d'équations quadratiques, si l'on suppose que le module k a pour valeur $\sqrt{-1}$, que

(¹) Comparer *Œuvres d'Abel*, édit. Sylow et Lie, t. I, p. 313-314; p. 360-362. T. II, p. 261, 262, 268, et p. 305, ligne 24 à partir d'en haut. L. L.

$2^{2^n}+1$ est un nombre premier, et que p et q désignent deux nombres entiers quelconques.

Chaque point de l'aire du carré en question qui représente géométriquement la valeur de l'une des grandeurs

$$u = \frac{p+qi}{2^{2^n}+1}\mathrm{K}$$

possède cette propriété que le point qui lui correspond sur l'aire circulaire et qui représente géométriquement la valeur de la grandeur $s = \sin\operatorname{am} u$ peut être trouvé au moyen de constructions géométriques qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas.

Si au lieu d'un carré nous avons un rectangle dont les côtés sont entre eux comme $2\mathrm{K}$ et K', alors la représentation conforme du demi-plan T pourra être pratiquée sur un rectangle semblable au rectangle donné par l'entremise de l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

lorsque le module k est déterminé à l'aide de l'équation

$$\begin{aligned} k &= 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4 \\ &= \left[\frac{2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right]^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé $q = e^{-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\pi}$ [1] (1).

Lorsqu'il s'agit de pratiquer la représentation conforme de l'aire d'un demi-plan T sur celle d'un triangle

---

(1) Ce numéro [1], ainsi que d'autres que l'on rencontrera dans le cours du Mémoire, se rapporte aux Notes ajoutées par M. Schwarz dans la Collection de ses Mémoires (Berlin, Springer; 1890) et qui sont reproduites à la fin de cette traduction. L. L.

rectiligne dont les angles sont $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, on obtient, au moyen de déductions tout à fait analogues, la formule suivante, qui permet d'opérer la représentation

$$C_1 u + C_2 = \int_{t_0}^{t} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\,dt.$$

Ici les trois grandeurs réelles a, b, c, qui correspondent aux trois sommets du triangle rectiligne peuvent être choisies arbitrairement, pourvu seulement qu'elles se succèdent le long du contour du demi-plan T, dans le même sens relativement à l'aire de ce plan, que les angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ du triangle se succèdent, relativement à l'aire de ce triangle, le long du périmètre de ce dernier.

Ces résultats fournissent la forme de la fonction par l'entremise de laquelle la surface d'un demi-plan peut être représentée, d'une manière conforme, sur l'aire simplement connexe dont le contour est celui d'un polygone rectiligne plan quelconque. Seulement, dans le cas général d'un polygone à n sommets, parmi les n grandeurs réelles a, b, c, d, ..., qui correspondent aux n sommets du polygone rectiligne, trois seulement seront choisies arbitrairement ; les $n-3$ qui restent sont déterminées par les rapports donnés entre les longueurs respectives des côtés du polygone considéré.

Si le polygone est un polygone régulier de n côtés et que l'on remplace la surface du demi-plan par l'aire d'un cercle, alors la représentation de l'aire du cercle sur celle d'un n — gone régulier, les centres des deux figures se correspondant entre eux, sera praticable par l'entremise de la fonction

$$u = \int_0^s \frac{ds}{(1-s^n)^{\frac{2}{n}}}.$$

Ces résultats, que j'indique ici, je les ai exposés au printemps de l'année 1864, dans le *Séminaire mathématique* de l'Université de Berlin, et les ai présentés, lors de ma « Promotion », à la Faculté philosophique de cette Université.

En août 1866 ils ont été communiqués par M. *Weierstrass* à l'Académie de Berlin.

Relativement au problème de la représentation de l'aire d'un polygone rectiligne sur celle d'un cercle, j'ai eu le plaisir de voir mes recherches se rencontrer avec celles de M. *Christoffel* sur le sujet suivant : *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie* (*Annali di Matematica*, IIª serie, Tomo I; 1867).

Je suis arrivé à démontrer rigoureusement la possibilité de déterminer les constantes dans le cas $n = 4$. Pour le cas général, je dois une démonstration rigoureuse à une bienveillante Communication de M. *Weierstrass* [2].

La formule indiquée ci-dessus peut être facilement étendue au cas où la surface dont le contour est celui d'un polygone rectiligne renferme, à son intérieur, des points de ramification ou bien le point situé à l'infini sur le plan.

Par exemple, l'aire du cercle sur le plan (s) de centre $s = 0$ et de rayon 1 sera représentée, d'une manière conforme, sur l'aire extérieure à un carré, par l'entremise de la formule

$$u = \int \frac{\sqrt{1 + s^4}}{s^2} ds;$$

au centre $s = 0$ correspond le point situé à l'infini sur le plan (u).

En même temps, on peut donc considérer comme résolu, en principe, le problème de la détermination de l'état thermique stationnaire sous certaines conditions assignées relativement au contour, dans le cas d'une aire plane s'étendant à l'infini et extérieure à un carré.

On est maintenant près de désirer de voir remplir ce desideratum : obtenir un exemple simple pour la représentation d'une aire à contour formé par une ligne courbe à cours continu sur l'aire d'un cercle ; et quelle figure peut-on choisir préférablement à une ellipse ?

Ici la recherche conduit au but, d'une manière satisfaisante, à l'aide de représentations conformes pratiquées par l'entremise des fonctions analytiques les plus simples.

L'aire sur le plan (u), intérieure à une parabole de foyer $u = 0$ et de sommet $u = 1$, sera représentée, d'une manière conforme, sur l'aire d'un cercle dans le plan (s), de centre $s = 0$ et de rayon 1, par l'entremise de la fonction

$$s = \operatorname{tang}^2\left(\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{u}\right).$$

L'aire intérieure à une ellipse dont les foyers sont $u = \pm 1$ et les extrémités des axes $u = \pm a$, $\pm bi$ sera représentée, d'une manière conforme, par l'entremise de la fonction

$$s = \sin\operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin u\right),$$

sur l'aire d'un cercle de centre $s = 0$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$, lorsque le module k est déterminé à l'aide des équations

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right]^4 = \left[\frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}}\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right]^2 [3].$$

La ligne courbe la plus simple est la circonférence.

Dans le problème de la représentation de l'aire d'une figure du plan (u), limitée par des segments d'arcs de cercle, sur la surface d'un demi-plan T, on est conduit au but par une déduction tout à fait analogue à celle qui a été exposée pour la représentation de polygones à contour rectiligne.

Lorsque la figure limitée par des arcs de cercle dans le plan (u) est représentée d'une manière conforme par l'entremise de la fonction

$$u' = \frac{C_1 u + C_2}{C_3 u + C_4},$$

sur un plan (u'), la figure correspondante sur le plan (u') est également limitée par des arcs de cercle parmi lesquels aussi peuvent se présenter des segments rectilignes.

Pour obtenir, une fois pour toutes, toutes ces représentations que l'on peut déduire les unes des autres au moyen de transformations par rayons vecteurs réciproques, on éliminera les constantes C. On a

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} + 2\frac{C_3^2}{(C_3 u + C_4)^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Si l'on désigne alors la fonction

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2$$

par $\Psi(u, t)$, il résulte ceci :

$$\Psi(u', t) = \Psi(u, t)$$

et, par conséquent, l'expression Ψ est indépendante des constantes C (¹) [4].

Deux arcs de cercle qui déterminent un sommet du contour d'encadrement de la figure peuvent comprendre entre eux, sur l'aire intérieure de la figure, un angle $\alpha\pi$. Les constantes C peuvent être choisies telles que ce sommet, déterminé sur le plan (u) par deux segments d'arcs de cercle, corresponde, sur le plan (u') à un sommet déterminé par deux segments rectilignes.

Alors, lorsqu'au point angulaire correspond la valeur $t = t_0$, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt}$ a, d'après ce qui précède, pour les valeurs de la grandeur t situées dans le domaine de la valeur $t = t_0$, le développement suivant

$$\frac{\alpha - 1}{t - t_0} + d_1 + d_2(t - t_0) + \ldots,$$

où les coefficients d ont des valeurs réelles.

Par conséquent, la fonction $\Psi(u, t) = \Psi(u', t)$ possède le développement

$$\frac{1}{2}\frac{1 - \alpha^2}{(t - t_0)^2} + \frac{\delta_1}{t - t_0} + \delta_2 + \delta_3(t - t_0) + \ldots,$$

valable pour le domaine de la valeur $t = t_0$, développement où les coefficients δ ont également des valeurs réelles.

Si la surface limitée par le polygone curviligne ne renferme à son intérieur aucun point de ramification, alors la fonction $\Psi(u, t)$ possède pour toutes les valeurs de l'argument t, qui correspondent aux points situés à l'intérieur du demi-plan, le caractère d'une fonction

---

(¹) L'expression Ψ est un invariant différentiel aujourd'hui bien connu sous le nom d'*invariant différentiel* ou *dérivée de Schwarz* qui lui a été donné par *Cayley* (Schwarzian derivative). L. L.

entière, puisqu'elle a pour toutes les valeurs réelles de l'argument t des valeurs également réelles et qu'elle possède le caractère d'une fonction rationnelle; cette fonction est donc une fonction rationnelle $F(t)$ de t.

Le problème de la représentation conforme de l'aire d'un polygone limité par des arcs de cercles sur celle d'un demi-plan est par conséquent ramené à l'intégration d'une équation aux dérivées totales

$$\Psi(u, t) = F(t),$$

ainsi qu'à la détermination d'un certain nombre de constantes.

Cette solution peut aisément être étendue au cas où l'aire du polygone en question, limité par des arcs de cercle, renferme à son intérieur des points de ramification; la fonction rationnelle $F(t)$ deviendra aussi, en ce cas, infiniment grande pour des valeurs complexes de la grandeur t, et le nombre des constantes à déterminer, ainsi que celui des équations de condition à remplir, sera augmenté.

Il est facile de démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle $\Psi(u, t) = F(t)$ est représentable comme quotient de deux solutions d'une même équation différentielle du second ordre ayant pour coefficients des fonctions rationnelles. Je dois cette remarque à une bienveillante communication de M. Weierstrass.

Si la figure à représenter est un triangle dont les côtés sont des arcs de cercle, l'équation différentielle précitée est celle de la série hypergéométrique et la détermination des constantes est praticable sans que l'on ait à résoudre des équations transcendantes [5].

Par l'entremise de l'intégrale

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\,dt,$$

regardée comme fonction de sa limite supérieure et où a, b, c désignent des constantes réelles, α, β, γ des constantes positives satisfaisant à la condition $\alpha+\beta+\gamma=1$, les aires des deux demi-plans T′ et T″, en lesquels l'axe des quantités réelles partage le plan (t), seront représentées sur celles de deux triangles rectilignes symétriques entre eux, U′ et U″ ayant pour angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$.

Le plan (t) pourra être représenté d'une manière conforme, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, sur la surface d'une sphère, de telle sorte qu'à l'axe des quantités réelles sur le plan (t) corresponde un grand cercle de la sphère. Alors, aux points symétriques sur les deux hémisphères correspondent comme images des points symétriques sur les aires des deux triangles plans.

Si l'on amène maintenant les deux triangles dans une position telle que leurs sommets correspondants coïncident, et si l'on conçoit alors que leurs surfaces, distinctes et séparées dans la représentation, aient en commun les points du contour d'encadrement et se raccordent entre elles le long de celui-ci, qui forme ainsi un *pli*, on est en présence d'une surface fermée U, simplement connexe, recouvrant partout doublement un triangle aux angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. Le long de tout le contour de ce triangle, la surface U possède un pli le long duquel les deux feuillets se raccordent entre eux d'une manière continue. On peut encore dire, en d'autres termes, que cette surface peut être regardée comme celle d'un prisme triangulaire à hauteur infiniment petite.

Maintenant, à cette surface fermée U correspond, d'une manière uniforme, la surface totale de la sphère. En tous les points, la représentation conserve la similitude en les plus petites parties, exception faite des points qui correspondent aux sommets; en ces derniers, la représentation reste seulement uniforme (¹) et continue.

Lorsque l'on n'a fait aucune convention relative au chemin d'intégration, la fonction intégrale u est une fonction multiforme de la limite supérieure t, à nombre infini de déterminations, et de même, en général, t est une fonction multiforme de u, à nombre infini de déterminations.

Il se présente des exceptions à cela pour les seuls systèmes de valeurs de α, β, γ qui suivent :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

Comparez le Mémoire précédemment cité de M. *Christoffel* et *Briot* et *Bouquet* (*Théorie des fonctions doublement périodiques*, 1re édition, p. 306-308).

Les différentes valeurs que peut prendre la grandeur u, le chemin d'intégration étant pris quelconque, pour une valeur déterminée de la limite supérieure t, peuvent toujours être déduites géométriquement de l'une d'entre elles au moyen de la surface U, en concevant que l'on ait recouvert le plan (u) d'un réseau de surfaces U en développant la surface U un nombre infini de fois sur le plan en question.

De la même manière, de la représentation conforme de l'aire d'un cercle sur celle d'un polygone rectiligne de n côtés, l'on déduit la représentation conforme de la

(¹) Uniforme (*eindeutig*), dans le sens du mot unidéterminatif, univoque, monotrope L. L.

surface de la sphère sur les deux côtés de la surface de ce polygone de n côtés.

Le problème inverse de ce dernier est un cas particulier de ce problème plus général : Représenter d'une manière uniforme la surface fermée simplement connexe d'un polyèdre, encadré par des faces planes, sur la surface d'une sphère, de telle sorte que la représentation soit partout semblable à l'original en les plus petites parties, à l'exception des points correspondant aux sommets, points du reste où la continuité ne doit éprouver aucune rupture.

En admettant par hypothèse qu'une représentation, jouissant des propriétés susdites, soit en général possible, l'on arrive à la solution suivante :

Concevons la surface du polyèdre développée sur un plan et désignons par u la variable complexe qui sera représentée géométriquement par un point à l'intérieur du réseau des faces du polyèdre étendu sur le plan. On représentera directement, d'une manière uniforme, la surface de la sphère sur un plan (x) dont les points représentent géométriquement les valeurs d'une grandeur complexe x.

Ceci posé, l'on a

$$\frac{du}{dx} = C\Pi(x - x_\nu)^{\alpha_\nu - 1}.$$

Dans cette formule, que j'ai communiquée à M. *Weierstrass* en 1866, x_ν désigne la valeur de la grandeur x, qui correspond à un des sommets du polyèdre, tandis que la somme des angles compris entre les arêtes qui aboutissent à ce sommet est égale à $2\alpha_\nu\pi$. Le produit Π doit s'étendre à tous les sommets du polyèdre. La somme $\Sigma(\alpha_\nu - 1)$, étendue à tous les sommets du polyèdre, lorsque la valeur $x = \infty$ ne correspond pas à un sommet du polyèdre, a pour valeur -2, ainsi qu'il résulte du théorème d'*Euler* relatif aux polyèdres.

L'exactitude de cette formule, toujours sous l'hypothèse de la possibilité d'une pareille représentation, peut être démontrée au moyen de la considération de la fonction $\frac{d}{dx}\log\frac{du}{dx}$; l'on peut aussi démontrer que les constantes x_ν sont, par les conditions du problème, déterminées d'une manière uniforme, à trois constantes arbitraires complexes près renfermées dans une substitution fractionnaire du premier degré; jusqu'ici, je ne suis pas encore parvenu à démontrer rigoureusement qu'il est possible, pour tout polyèdre assigné, de déterminer explicitement ces constantes conformément aux conditions du problème [6].

En certains cas, cette détermination des constantes est praticable *a priori*, par exemple, lorsque le polyèdre assigné est régulier.

Ainsi la représentation de la surface de la sphère sur celle d'un cube peut être pratiquée par l'entremise de l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - 14x^4 + x^8}}$$

[(*Voir* page 2 du Tome I des *Œuvres de M. Schwarz* : Sur la surface minima dont le contour donné est un quadrilatère gauche dont les côtés sont formés par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier (publié d'abord dans les *Monatsberichte der Berliner Akad.*, p. 150; 1865)].

On peut rattacher à la représentation de la surface des polyèdres réguliers sur la sphère un nombre de problèmes analytiques parmi lesquels je mentionnerai le suivant :

Trouver tous les triangles sphériques qui peuvent être représentés d'une manière conforme sur l'aire d'un cercle par l'entremise de fonctions algébriques des coordonnées [7].

Qu'il est toujours possible de représenter, d'une manière connexe et en conservant la similitude en les plus petites parties, une surface plane simplement connexe, dont le contour est formé par une ligne simple composée de portions de courbes analytiques, sur l'aire d'un cercle : c'est ce que *Riemann* a cherché à démontrer à l'aide du *principe* dit *de Dirichlet*.

Comme il a été fait des objections, bien fondées relativement à la rigueur, à la légitimité de ce mode de raisonnement dans les démonstrations des théorèmes d'existence, il était désirable de posséder un procédé de démonstration qui ne pourrait donner lieu aux critiques élevées contre le principe de *Dirichlet*.

J'ai cherché à établir une telle démonstration dans un Mémoire communiqué à M. *Weierstrass*, en novembre de l'année 1868, pour le cas où le contour de la figure à représenter est en tous ses points *convexe* par rapport à l'extérieur de la figure [8].

Notes de M. Schwarz *au précédent Mémoire publiées dans les Gesammelte Abhandlungen, tome II;* 1890.

[1] Relativement à ces considérations on peut comparer le passage suivant du Mémoire de *Jacobi : Sur les nombres complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus des cinquième, huitième et douzième puissances* (*Journal de Crelle,* t. 19, p. 315) : « ... Ce pourrait être un problème aussi intéressant que difficile d'obtenir une interprétation géométrique de cette division de l'arc de la lemniscate en $a+b\sqrt{-1}$ parties et de la composition de la $p^{\text{ième}}$ partie de l'arc à l'aide de sa division en $a+b\sqrt{-1}$ et en $a-b\sqrt{-1}$ parties. Dans ces

derniers temps les imaginaires ont pris place avec grand succès dans le domaine de la Géométrie; on peut s'attendre, après le merveilleux progrès qu'elle a réalisé ainsi entre les mains de *Steiner,* à ce qu'elle prenne aussi possession de ces idées plus abstraites. »

[2] La démonstration que l'on doit à M. *Weierstrass,* relativement à la possibilité de la détermination des constantes repose sur une variation continue des constantes a, b, c, ... Une démonstration basée sur les mêmes idées a été publiée par M. Schläfli, dans son Mémoire : *Sur la possibilité générale de la représentation conforme d'une figure plane délimitée par des droites sur un demi-plan* (*Journal de Crelle,* t. 78, p. 63-80; 1873).

Le Mémoire de l'Auteur (M. Schwarz), *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u = 0$ ..., publié p. 144-171 des *Œuvres,* t. II, tire son origine essentiellement de l'effort fait pour trouver une démonstration indépendante pour la possibilité de la détermination des constantes en question.

[3] Comparez, p. 102-107 des *Œuvres* précitées, t. II : *Notizia sulla rappresentazione conforme di un' area ellitica sopra un' area circolare*, par M. *Schwarz.*

[4] Dans le Mémoire : *Sur la construction des Cartes géographiques* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, 1779, p. 161-185), *Lagrange* traite le problème suivant : « Si l'on désigne par $f(u+ti)$ et $F(u-ti)$ deux fonctions conjuguées des deux arguments complexes conjugués $u+ti$, $u-ti$, déterminer toutes les représentations conformes du plan $u+ti$ sur le plan $x+yi$, praticables par l'entremise des équations

$$x = \frac{1}{2}[f(u+ti) + F(u-ti)],$$

$$y = \frac{1}{2i}[f(u+ti) - F(u-ti)],$$

$$x+yi = f(u+ti), \qquad x-yi = F(u-ti),$$

et qui jouissent de cette propriété qu'au réseau *des lignes* *droites* respectives $u =$ const., $t =$ const. sur le plan $u + ti$, correspond un réseau *de circonférences* sur le plan $x + yi$. »

Pour résoudre ce problème, *Lagrange* évalue les courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{\rho}$ des courbes sur le plan $x + yi$ qui correspondent respectivement aux droites $u =$ const., $v =$ const. et il obtient, la grandeur $\frac{1}{\sqrt{f'(u+ti)F'(u-ti)}}$ étant désignée par Ω, les équations

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial\Omega}{\partial t}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial\Omega}{\partial u}.$$

Au moyen respectivement de la première et de la seconde de ces deux équations l'on obtient, puisque par suite de la condition posée la grandeur r ne doit pas dépendre de la grandeur u, ni la grandeur ρ de la grandeur t, l'équation de condition suivante

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial u} = 0. \qquad (\text{Lagrange}, \textit{loc. cit.}, \text{p. } 173.)$$

Cette équation de condition conduit à l'équation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{f'''(u+ti)}{f'(u+ti)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(u+ti)}{f'(u+ti)}\right)^2 \\ &\quad = \frac{F'''(u-ti)}{F'(u-ti)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(u-ti)}{F'(u-ti)}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

à l'aide de laquelle on reconnait que dans le problème considéré par *Lagrange* les expressions dans le second et dans le premier membre de l'équation précédente doivent être égales à une même constante réelle, que l'on pourra désigner par $-2k$.

La fonction f par conséquent doit satisfaire à une équation de la forme

$$(2)\qquad \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -2k.$$

Lagrange, du reste, n'a pas présenté l'équation qui sert à déterminer la fonction f sous cette forme ; il arrive, en posant

$$\frac{1}{\sqrt{f'(u+ti)}} = \varphi(u+ti),$$

à l'équation

$$(3)\qquad \frac{\varphi''(u+ti)}{\varphi(u+ti)} = k.$$

Le passage de l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre (2) à l'équation différentielle linéaire du second ordre (3) est un cas particulier du passage traité p. 219-220 des Œuvres de l'auteur, t. II (*Théorie de la série hypergéométrique de Gauss*), où l'on pose $p = 0$, $q = -k$. D'après cela, lorsque la fonction $f(u+ti)$ vérifie l'équation différentielle (2), la fonction $\dfrac{f(u+ti)}{\sqrt{f'(u+ti)}}$ est une seconde intégrale particulière de l'équation différentielle (3).

Lorsqu'il n'est pas question d'un *réseau de circonférences*, mais que l'on traite *séparément* d'un *arc de cercle* du plan $x+yi$ qui doit, par exemple, correspondre à un segment de l'axe des quantités réelles $t = 0$ du plan $u+ti$, lors d'une représentation conforme praticable par l'entremise de la fonction $x+yi = f(u+ti)$, les conclusions de *Lagrange* restent valables en leurs points essentiels, avec cette modification que l'équation (1) doit être satisfaite, non pour une région doublement étendue, mais seulement *tout le long d'une ligne*, c'est-à-dire ici le long d'un segment de l'axe des quantités réelles sur le plan $u+ti$, en sorte, par conséquent, que la grandeur

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -2\,\frac{\varphi''}{\varphi}$$

ne doit pas nécessairement être une constante, mais peut être une fonction quelconque de l'argument complexe $u+ti$, qui jouit de cette propriété qu'à des valeurs réelles (correspondant au segment en question de l'axe des quantités réelles) de l'argument, correspondent des valeurs *réelles* de la fonction.

Conformément aux notations de l'auteur, p. 219 de ce Mémoire, et p. 220, t. II des *Œuvres* (*Sur la Théorie de la série hypergéométrique*), l'expression du premier membre de l'équation (1), tirée des recherches de *Lagrange*, pourrait être désignée par $\Psi(f, u+ti)$; ce qui nous prouve qu'il est possible de déduire directement l'expression différentielle Ψ des recherches contenues dans le Mémoire précité de *Lagrange*.

Quant à la notation $\Psi(s, x)$, on peut faire l'objection que, relativement à cette expression, nous n'avons pas à faire à une *fonction* des deux arguments s et x, mais plutôt à une expression différentielle formée à l'aide de la fonction s, en différentiant d'une certaine manière par rapport à x. Aussi la notation et la désignation adoptées par M. *Cayley*, pour cette expression différentielle

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2,$$

ont incontestablement l'avantage sur celles employées par l'auteur.

M. *Cayley* a fait l'honneur à l'auteur de joindre son nom à la désignation de l'expression $\{s, x\}$ [ARTHUR CAYLEY, *Sur la dérivée de Schwarz et les fonctions des corps réguliers;* Cambridge (*Math. Trans.*, t. XIII, Part I, p. 5-68)]. Le Mémoire de M. *Cayley*, rempli de détails et extraordinairement riche en matières, expose les recherches des divers écrivains sur les questions qui peuvent être rattachées à l'expression différentielle $\{s, x\}$, sous une forme des plus lucides et complètes, en ajoutant encore du nouveau aux résultats des recherches des autres. Le Mémoire renferme aussi une bibliographie du sujet, ainsi qu'un développement détaillé des formules de transformation relatives à l'expression différentielle $\{s, x\}$. A l'aide de l'une des formules qu'il établit,

$$\{s, x\} = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \{x, s\},$$

M. *Cayley* retrouve la théorie des *réciprocants*, déjà connue par les travaux de *Sylvester*.

Un travail de M. *Neovius* (Helsingfors, 1883, p. 14), intitulé: *Détermination de deux surfaces minima périodiques particulières sur lesquelles sont situées une infinité de droites et une infinité de lignes géodésiques planes,* renferme un exposé des relations qui existent entre l'expression différentielle désignée par $D_x(p)$ par M. *Schottky* (*Sur la représentation conforme d'aires planes à connexion multiple.* Berlin 1875; Dissertation inaugurale) et l'expression désignée par $[v, u]$ par M. *Dedekind*, d'une part [*Sur les fonctions mo-*

dulaires elliptiques (*Crelle*, tome 83, p. 278)] et la susdite expression différentielle $\{s, x\}$, d'autre part.

Ces relations sont données par les équations

$$D_x(p) = 2\left(\frac{dp}{dx}\right)^{-2}\{p, x\},$$

$$[v, u] = 2\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1}\{v, u\}.$$

M. *Neovius* renvoie encore aux pages 298, 415, 416 des *Œuvres de Riemann, première édition.*

L'Ouvrage de M. *Klein* (*Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré;* Leipzig, 1884) renferme, pages 66 à 82, une *présentation* détaillée de certaines recherches reposant sur la considération de l'expression différentielle $\{\eta, Z\}$.

M. *Klein*, pour l'expression différentielle $\{\eta, Z\}$, emploie la notation $[\eta]_z$.

[5] *Voir* à ce sujet, Section III du Mémoire déjà cité : *Sur les cas où la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément* (Schwarz, *Œuvres*, t. II, p. 221 à 233).

[6] La démonstration de la possibilité de déterminer les constantes dont on parle ici est donnée pour le tétraèdre (*Représentation conforme de la surface d'un tétraèdre sur celle d'une sphère*), aux pages 94 à 101, *loc. cit.*, et pour un polyèdre quelconque à faces planes, dans le Mémoire *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u = 0$ (p. 167 à 170, *loc. cit.*).

[7] *Voir* Section VI du Mémoire, déjà cité, *Sur la série hypergéométrique de Gauss* (*loc. cit.*, p. 243 à 254).

[8] La démonstration citée ici est, en ses points essentiels, la même que celle donnée par l'auteur dans le Mémoire *Sur la théorie de la représentation conforme* (*loc. cit.*, t. II, p. 108 à 132).