Licence ès sciences mathématiques. Session de juillet 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 18-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__18_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Paris.

ANALYSE. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$\int_C \frac{(ab'-ba')(x\,dy-y\,dx)}{(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2},$$

prise dans le sens positif le long d'une courbe C, *entourant l'origine et où* a, b, a', b' *désignent des constantes réelles.*

Montrer que la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la courbe C, *et trouver cette valeur.*

L'expression à intégrer est la différentielle totale de la fonction

$$\text{arc tang}\,\frac{a'x+b'y}{ax+by},$$

qui ne dépend visiblement que de la seule variable $y:x$. Si donc on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, l'intégrale cherchée J aura pour valeur la variation qu'éprouve la fonction

$$\text{arc tang}\,u \qquad \left(u = \frac{a'\cos\theta+b'\sin\theta}{a\cos\theta+b\sin\theta}\right),$$

quand θ varie de zéro à 2π. Or, cette fonction est croissante si $ab' - ba' > 0$, décroissante si $ab' - ba' < 0$; et, étant donnée une valeur quelconque m, la fraction u acquiert cette valeur m pour deux angles θ compris entre zéro et 2π. Par suite, la variation de arc tang$u$ est égale à 2π. Si donc $ab' - ba' > 0$, on a $J = 2\pi$; si $ab' - ba' < 0$, on a $J = -2\pi$.

II. *Une surface est rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, et les coordonnées x, y, z d'un point variable de cette surface sont exprimées en fonction de deux paramètres u et v. On suppose, de plus, que l'on a identiquement*

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

1° *On démontrera que les lignes de courbure de cette surface sont données par les équations*

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

2° *Dans le cas particulier où $x = u$, trouver les expressions générales des fonctions y et z de u et v, satisfaisant aux équations* (1) *et* (2).

L'équation (1) exprime que le réseau formé par les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ est orthogonal; l'équation (2) exprime que ce réseau est conjugué. Il est donc constitué par les lignes de courbure.

Quand $x = u$, l'intégration de l'équation (2) donne d'abord

$$\frac{\partial z}{\partial v} + V_1 \frac{\partial y}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Substituant dans (1), simplifiant et intégrant, on trouve

$$y = V_1 z + V_2. \tag{4}$$

Portant y dans (3) et intégrant, on obtient

$$z\sqrt{1+V_1^2} = U - \int \frac{V_1}{\sqrt{1+V_1^2}}\, dV_2. \tag{5}$$

Dans ces diverses formules, V_1 et V_2 sont des fonctions arbitraires de v, et U est une fonction arbitraire de u. Si l'on pose

$$V_1 = \operatorname{tang}\varphi, \qquad V_2 \cos\varphi' \cos\varphi = V',$$

on donne aisément aux expressions de z et y, tirées de (5) et (4), les formes suivantes

$$z = (U + V)\cos\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$y = (U + V)\sin\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\cos\varphi,$$

ce qui permet de prendre pour φ le paramètre v lui-même. On trouve ainsi les surfaces moulures. (*Voir* le Problème proposé à la Licence en juillet 1895, *Nouvelles Annales*, p. 29-30; 1896.)

III. (Élèves de l'École normale). — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont la normale reste tangente à une sphère donnée.*

2° *Démontrer que l'un des systèmes de lignes de courbure se compose de développantes de cercle.*

3° *Démontrer que les lignes de courbure du second système sont sphériques.*

La question est empruntée à Monge (*Application de l'Analyse à la Géométrie,* art. XXIII, *De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même sphère*). Nous engageons vivement nos lecteurs à étudier le beau Chapitre où elle est résolue.

MÉCANIQUE. — I. *Étudier le mouvement d'un disque circulaire plan, homogène, infiniment mince, deux points diamétralement opposés de sa circonférence étant assujettis à décrire respectivement deux droites rectangulaires concourantes* Ox *et* Oz. *On admet qu'il n'y a pas d'autres forces extérieures que les réactions des droites* Ox *et* Oz, *qui sont supposées normales à ces droites.*

Si l'on appelle φ l'angle du plan du disque avec le plan zOx, θ l'angle de Oz avec le diamètre dont les extrémités décrivent Ox et Oz, R le rayon du disque, M sa masse, T la force vive, on trouve

$$T = \frac{MR^2}{8}[(5 + \cos^2\varphi)\theta'^2 + \varphi'^2],$$

en désignant par des accents les dérivées prises par rapport au temps.

Le travail des forces étant nul, on a d'abord l'intégrale

$$(5 + \cos^2\varphi)\theta'^2 + \varphi'^2 = \text{const.} = h \qquad (h > 0),$$

et, de plus, la dérivée de T par rapport à θ étant nulle, l'une des équations de Lagrange montre que $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$ est constant ; d'où

$$(5 + \cos^2\varphi)\theta' = \text{const.} = A.$$

Des intégrales ainsi obtenues, on déduit

$$dt = \frac{\sqrt{5+\cos^2\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{5h - \mathrm{A}^2 - h\cos^2\varphi}},$$

$$d\theta = \frac{\mathrm{A}\,d\varphi}{\sqrt{5+\cos^2\varphi}\,\sqrt{5h - \mathrm{A}^2 + h\cos^2\varphi}}.$$

Si $5h - \mathrm{A}^2 > 0$, φ varie toujours dans le même sens, ainsi que θ.

Si $5h - \mathrm{A}^2 = 0$, φ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$ pour t infini ; θ prend toutes les valeurs possibles.

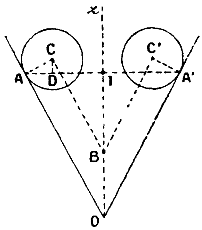
Si $5h - \mathrm{A}^2 < 0$, le plan du disque oscille de part et d'autre du plan $z\mathrm{O}x$; θ varie toujours dans le même sens.

II. *On donne dans un plan deux droites* OA, OA′ *auxquelles sont respectivement tangents deux cercles égaux* C *et* C′. *Les cercles sont primitivement symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice* Oz *de l'angle* AOA′. *On fait rouler les cercles* C *et* C′ *sur les droites* OA, OA′ *avec la même vitesse angulaire constante* ω.

Quelles sont les courbes liées invariablement aux cercles C *et* C′ *qui, dans le mouvement relatif de ces cercles, roulent l'une sur l'autre sans glisser?*

Il y a lieu de distinguer le cas où les cercles C *et* C′ *tournent avec des sens contraires de celui où ils tournent dans le même sens. Qu'arrive-t-il dans ce dernier cas? Comment peut-on alors définir le mouvement?*

1° Supposons d'abord les rotations de sens contraire ; les deux cercles resteront symétriques par rapport à Oz. Le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre sera une rotation de vitesse angulaire 2ω, autour de I, milieu de AA'. Soient R le rayon des deux cercles, 2α l'angle AOA', B le point de Oz situé à la distance R



des deux côtés de cet angle. On a

$$\begin{aligned} DI &= OA \sin\alpha - R\cos\alpha \\ &= (CB + R\,\omega t\alpha)\sin\alpha + R\cos\alpha = CB\sin\alpha. \end{aligned}$$

Mais si l'on compte le temps à partir de l'instant où C est en B, on aura

$$CB = R\omega t,$$

d'où

$$DI = R\sin\alpha . \omega t.$$

Cette relation définit une développante du cercle de rayon $R\sin\alpha = CD$. La base sur laquelle roule le lieu du point I est une courbe égale à celle-ci; elles restent symétriques par rapport à Oz.

2° Si les rotations des deux cercles sont de même sens, elles équivalent pour le mouvement relatif à une translation perpendiculaire à AA' et de vitesse constamment croissante $\omega . AA'$.

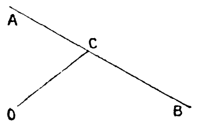
III. (Élèves de l'École normale). *Un cylindre de révolution homogène, pesant, de masse m est couché sur un plan horizontal* $\xi O \eta$, *sur lequel il peut glisser sans frottement; suivant l'axe de ce cylindre est percé un canal de section infiniment petite, dans lequel se trouve un point pesant de même masse m, pouvant* *glisser sans frottement le long du canal. Étudier le mouvement du système en supposant le cylindre lancé sur le plan.*

IV. (Élèves de l'École normale). *Soient* M *un point d'une figure plane invariable,* M' *le centre de courbure de sa trajectoire,* I *le centre instantané de rotation. Rappeler la démonstration de ce Théorème classique :*

L'axe radical du cercle de centre M *et de rayon* MI *et du cercle décrit sur* MM' *comme diamètre passe par un point* K' *qui est fixe, c'est-à-dire indépendant du point* M *choisi ; de plus, ce point* K *est situé sur la normale commune aux deux roulettes fixe et mobile.*

Appliquer cette proposition au problème suivant :

Une tige AB *s'articule en un de ses points* C *à l'extrémité d'une manivelle* OC, *qui est libre de tourner autour de son autre extrémité* O. *On assujettit le*



point A *à décrire une courbe* α; *le point* B *en décrit une autre* β.

1° *Connaissant la normale à la courbe* α, *construire le centre instantané* I *de la tige* AB, *la normale à la courbe* β *et le point où la tige* AB *touche son enveloppe.*

2° *Connaissant le centre de courbure de la courbe* α, *construire la normale aux deux courbes roulettes ainsi que les centres de courbure de la courbe* β *et la courbe de la droite* AB.

Épreuves pratiques. — I. *On donne les trois angles* *d'un triangle sphérique*

$$A = 116^{\circ}20'2'',2; \qquad B = 75^{\circ}0'51'',6; \qquad C = 70^{\circ}6'59'',2.$$

On demande : 1° de calculer les trois côtés ; 2° quelle variation entraînera sur le côté a une variation de 1″ sur l'angle A.

II. (Élèves de l'École normale). *Par deux étoiles, dont les coordonnées équatoriales sont*

$$\mathcal{A} = 4^{h}36^{m}23^{s},11; \qquad \mathcal{D} = +22^{\circ}3'51'',6;$$
$$\mathcal{A}' = 2^{h}33^{m}36^{s},81; \qquad \mathcal{D}' = +15^{\circ}5'\ 4'',2,$$

on fait passer un grand cercle.

Déterminer l'ascension droite des nœuds de ce cercle avec l'équateur, et l'inclinaison de son plan sur celui de l'équateur.

Lille.

Analyse. — I. *Désignant par z une variable complexe, étudier la fonction u définie par l'équation*

$$u^2 = 1 + z^2,$$

en précisant l'influence du chemin décrit par la variable sur la valeur de la fonction.

Indiquer ensuite quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{dz}{u},$$

lorsque le chemin d'intégration se déforme de toutes les manières possibles, en supposant seulement que pour la limite inférieure z = 0, l'on ait u = + 1.

II. *On donne l'hélice définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$(1) \qquad x = ae^{m\omega}\cos\omega, \qquad y = ae^{m\omega}\sin\omega, \qquad z = be^{m\omega},$$

a, m, b étant trois constantes,

1° *Trouver la relation qui existe entre l'arc de cette hélice et son rayon de courbure ;*

2° *Démontrer que cette hélice appartient à un cône de révolution dont elle coupe toutes les génératrices sous le même angle ;*

3° *Trouver le lieu du centre de courbure de l'hélice, le lieu du centre de la sphère osculatrice et la ligne de striction de la surface gauche formée par ses normales principales ;*

4° *Démontrer que toute hélice dont l'arc est lié au rayon de courbure par la relation trouvée au* 1° *peut être représentée par des équations de la forme* (1).

La première et la quatrième partie de la deuxième Question se traitent immédiatement par la Géométrie, si l'on remarque que la relation donnée entre le rayon de courbure et l'arc entraîne une relation analogue pour la courbe plane, section droite du cylindre, et si l'on admet que, dans le plan, cette relation caractérise la spirale logarithmique. La démonstration analytique est d'ailleurs toute pareille à celle que l'on donne de cette dernière proposition et qui est bien connue.

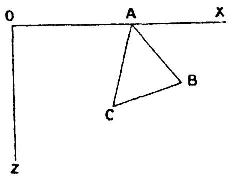
La deuxième Partie se traite aisément par le Calcul et la Géométrie.

Pour la troisième Partie, des considérations géométriques simples prouvent que l'on doit trouver des courbes de même nature que la proposée, et un calcul facile en donne les équations.

Mécanique. — I. 1° *Démontrer le Théorème de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre, dans le cas d'un point matériel ;*

2° *Étendre le Théorème des moments des quantités de mouvement, et celui des forces vives, au cas du mouvement d'un système autour de son centre de gravité.*

II. *Un triangle équilatéral* ABC, *homogène et pesant, est mobile dans un plan vertical. Il peut tourner*



librement autour de son sommet A, *qui est assujetti à se mouvoir sur une horizontale* OX. *On demande d'étudier son mouvement en négligeant les frottements.*

Epreuve pratique. Calcul d'astronomie. — *Étant données les longitudes l, l' et les latitudes λ, λ' de deux positions de la Lune considérée à quelques jours d'intervalle, calculer l'inclinaison φ du plan actuel de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique et la longitude θ de son nœud ascendant.*

Application :

$$l = 63^\circ 20' 14'',4, \qquad \lambda = 1^\circ 31'\ 6'',9,$$
$$l' = 146^\circ 22' 46'',1, \qquad \lambda' = 5^\circ\ 1' 45'',7.$$

Clermont.

Analyse. — I. *Formule de Fourier.*

II. *En chaque point* M *d'une surface* ε, *on mène la normale et la parallèle à* Oz *qui coupent respectivement le plan* xOy *aux points* P *et* Q. 1° *Trouver les surfaces* ε *telles que l'aire du triangle* POQ *soit une fonction donnée de* OM; 2° *telles que le volume du tétraèdre* OPQM *soit proportionnel à une puissance de* OM; *valeur de l'exposant de cette puissance pour que l'intégration puisse s'effectuer complètement.*

En conservant les notations habituelles, on trouve, pour les coordonnées des points P et Q, les valeurs suivantes :

Coordonnées de P......	$x+pz$	$y+qz$	o
Coordonnées de Q......	x	y	o

On aura donc

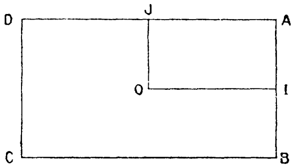
$$\text{aire POQ} = \tfrac{1}{2} z\,(qx - py),$$
$$\text{vol. MOPQ} = \tfrac{1}{6} z^2(qx - py).$$

On est donc ramené aux équations linéaires

$$z\,(qx - py) = F(x^2 + y^2 + z^2), \tag{1}$$
$$z^2(qx - py) = K(x^2 + y^2 + z^2)^p, \tag{2}$$

qui s'intègrent facilement. La deuxième conduit à une intégrale binôme.

Mécanique. — *Une plaque homogène pesante a la forme d'un rectangle* ABCD *dont les côtés sont* $BC = 2a$, $AB = 2b$ (*on suppose* $a > b$). *Le centre de*



gravité O *de la plaque se meut sans frottement sur une droite fixe h. Trouver le mouvement et la réaction au point* O.

Effectuer complètement les calculs avec les vitesses initiales suivantes :

Vitesse de O = zéro.

La vitesse du milieu I *de* AB *a pour composantes :*

Suivant OJ, $v_0 \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; *suivant la normale à la plaque*, u_0.

La vitesse initiale du milieu J *de* AD *a pour composantes :*

Suivant OI, $-v_0 \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; *suivant la normale*, $\dfrac{v_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Le mouvement du centre de gravité est le mouvement d'un point pesant sur une droite.

Le mouvement relatif autour du centre de gravité est un mouvement à la Poinsot.

Les données initiales sont choisies de telle sorte que l'intégration puisse se faire sans fonctions elliptiques.

Astronomie. — *Démonstration succincte des formules données par la* Connaissance des Temps *pour le Calcul des Occultations. Application à l'occultation de* η *du Taureau le* 7 *janvier* 1895, *au Puy-de-Dôme. Première approximation à trois décimales. S'il reste du temps, deuxième approximation; calcul de l'heure locale de l'émersion, suivi des calculs à* 1° *près de l'angle au pôle* P *et de l'angle au zénith* Z.

Bordeaux.

Analyse. — I. *Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure, en un point quelconque* M *de la courbe, soit dans un rapport constant avec la portion de normale comprise entre ce point et une droite donnée* Oy.

Ramener la recherche à une quadrature et indiquer dans quel cas cette quadrature peut être effectuée en termes finis.

II. *Intégrer, à l'aide des développements en séries, l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - yx^p = 0,$$

lorsque p est un nombre entier positif, égal ou supérieur à 3.

Quelles sont les particularités qui se présentent lorsque p est égal à 2, à 1, à 0.

Mécanique. — I. *Mouvement d'un point pesant, assujetti à glisser sans frottement sur le paraboloïde représenté en coordonnées rectangulaires (axe des z verticalement ascendant) par l'équation*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 2z = 0$$

(A et B étant deux constantes quelconques).

On rapportera la surface à des coordonnées elliptiques, en la coupant par les paraboloïdes homofocaux, dont l'équation générale est

$$\frac{x^2}{A - \lambda} + \frac{y^2}{B - \lambda} - 2z + \lambda = 0.$$

II. *Un cylindre circulaire droit, dont le rayon de base est a et la hauteur h, est rempli d'eau et posé sur un plan horizontal. On fait tourner ce plan autour d'un diamètre de la base du cylindre et l'on suppose que le vase ne glisse pas.*

On demande : 1° de trouver le lieu géométrique du centre de gravité du liquide qui reste dans le vase lorsque le plan s'incline graduellement ; 2° de déterminer, en négligeant la masse du vase, l'angle minimum que doit faire le plan avec le plan horizontal, pour que le vase tombe.

ASTRONOMIE. — *Calculer, pour la latitude de Bordeaux* ($\varphi = 44^\circ 50' 7'', 2$), *les azimuts du coucher du Soleil les* 21 *juin*, 21 *juillet*, 21 *août*, 21 *septembre*, 21 *octobre*, 21 *novembre et* 21 *décembre* 1896.