NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Applications de la théorie des substitutions linéaires à l'étude des groupes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 149-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__149_0>

[B2d]

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES A L'ÉTUDE DES GROUPES [1];

PAR M. H. LAURENT.

I. — GROUPES DE SUBSTITUTIONS.

Des substitutions forment un *groupe* quand leurs produits font partie de ces substitutions.

L'ordre d'un groupe est le nombre de ses substitutions. Un groupe peut être d'ordre fini ou infini.

Un groupe d'ordre infini est discontinu, quand la différence de deux de ses substitutions ne peut devenir infiniment petite (c'est-à-dire avoir tous ses éléments infiniment petits); il est continu dans le cas contraire.

Exemples. — La substitution circulaire

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1}$$

et ses puissances forment un groupe d'ordre fini. Les substitutions échangeables $f(s)$ forment un groupe continu, les substitutions à coefficients entiers forment un groupe discontinu.

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_p$ des substitutions, leurs puissances et leurs produits forment un groupe dit *groupe dérivé de* $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Nous allons étudier quelques groupes.

[1] *Voir* 3e série, t. XV, 1896, p. 345 : *Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires.*

II. — Groupe orthogonal.

La substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$, où

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n, \end{aligned}$$

est orthogonale, quand on a identiquement

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 \ldots y_n^2. \tag{1}$$

Il est facile de voir alors que l'on a : 1°

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \ldots + \alpha_{in}^2 = 1, \\ &\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \ldots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = 0. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

2° Si les relations ont lieu, (1) a lieu et la substitution est orthogonale.

3° On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \ldots + \alpha_{n1} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \alpha_{1n} y_1 + \alpha_{2n} y_2 + \ldots + \alpha_{nn} y_n; \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{ji}}, \qquad A = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}.$$

4° $A = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots = \pm 1$, car $A^2 = 1$, en vertu de (2). Nous n'insisterons pas sur ces résultats qui sont bien connus.

La substitution $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$ est dite *gauche* quand on a $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, sans que l'on ait forcément $\gamma_{ii} = 0$. Voici comment on peut déduire une substitution orthogonale d'une substitution gauche. Considérons la substitution gauche $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$ où $\gamma_{ii} = 1$, et posons

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11} t_1 + \gamma_{12} t_2 \ldots + \gamma_{1n} t_n, \\ x_2 &= \gamma_{21} t_1 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{2n} t_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \gamma_{n1} t_1 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{nn} t_n. \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_{11} t_1 + \gamma_{21} t_2 + \ldots + \gamma_{n1} t_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \gamma_{1n} t_1 + \gamma_{2n} t_2 + \ldots + \gamma_{nn} t_n; \end{aligned}$$

l'élimination des t donne

$$\begin{vmatrix} x_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ x_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \\ y_i & \gamma_{1i} & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{ni} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \ldots + \alpha_{jn} x_n = y_i,$$

en posant

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{ji}} \gamma_{1i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{j2}} \gamma_{2i} + \ldots \right); \\ \Gamma &= \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22} \pm \ldots \pm \gamma_{nn}, \end{aligned} \right.$$

ou, en vertu de $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ et $\gamma_{ii} = 1$,

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{j1}} \gamma_{i1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{j2}} \gamma_{i2} + \ldots \right) + \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{ij}};$$

ou enfin

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{ji}}, \qquad \alpha_{ii} = -1 + \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{ii}}.$$

Or il est facile de constater que l'on a

$$\alpha_{1i} y_1 + \alpha_{2i} y_2 + \ldots + \alpha_{ni} y_n = x_i,$$

de sorte que la substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ est orthogonale ; en appelant G la substitution $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$, on a donc

$$s = \frac{2}{G} - 1, \qquad G = \frac{2}{s+1};$$

cette formule suppose seulement G de déterminant différent de zéro.

Cette méthode pour la formation des substitutions orthogonales est due à M. Brioschi.

On sait aussi comment la théorie des polynomes du second degré peut fournir des substitutions orthogonales, mais moins simplement.

Les substitutions orthogonales forment un groupe, qui est le groupe orthogonal. En effet, si

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \ldots + \alpha_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \beta_{11} z_1 + \ldots + \beta_{1n} z_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

sont deux substitutions orthogonales, on aura

$$x_1^2 + x_2^2 \ldots = y_1^2 + y_2^2 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 \ldots,$$

ce qui prouve bien que la substitution qui donne les x en fonction des z est orthogonale.

Le lecteur vérifiera facilement que l'équation caractéristique d'une substitution gauche G a ses racines imaginaires et qu'il en est de même de l'équation caractéristique d'une substitution orthogonale; d'ailleurs cette dernière équation est réciproque (bien entendu, si l'équation est de degré impair, elle a une racine réelle).

Le groupe orthogonal dérive d'un certain nombre de substitutions simples de la forme

$$\omega = 1 - 2(\tau_{ii} + \tau_{jj}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\tau_{ij} - \tau_{ji}) \sin \varphi.$$

Cette substitution peut aussi se mettre sous la forme

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn} + (\tau_{ii} + \tau_{jj}) \cos \varphi + (\tau_{ij} - \tau_{ji}) \sin \varphi$$

(τ_{ii} et τ_{jj} ne figurant pas dans les premiers termes), et l'on voit alors immédiatement qu'elle est orthogonale.

En multipliant entre elles $\frac{n(n-1)}{2}$ substitutions telles que ω, on introduit $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres qui permettent d'identifier le produit avec une substitution orthogonale quelconque.

Parmi les substitutions orthogonales figurent les substitutions de lettres telles que

$$\tau_{\alpha\beta} + \tau_{\beta\gamma} + \ldots + \tau_{\nu\alpha}.$$

Le groupe des substitutions de lettres est contenu dans le groupe orthogonal : le premier est d'ordre fini, le second est d'ordre infini et continu.

Proposons-nous de trouver toutes les fonctions qui restent inaltérées par les substitutions du groupe orthogonal [c'est-à-dire telles que

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \ldots + \alpha_{21}\, x_1 + \ldots),$$

$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ désignant une substitution orthogonale quelconque]. Une pareille fonction ne sera pas altérée par une substitution orthogonale simple; on devra donc avoir

$$F(x_1, x_2, \ldots) = F(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi,\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \ldots).$$

Posons

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

on aura, en différentiant par rapport à φ,

$$0 = F_1(-x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi) + F_2(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi),$$

et en posant $\varphi = 0$

$$0 = x_2 F_1 - x_1 F_2.$$

Ainsi, on devra avoir

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Les fonctions F et $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ ont donc leurs dérivées proportionnelles ; donc F est fonction de $x_1^2+x_2^2+\ldots$; donc les seules fonctions qui restent inaltérées par les substitutions orthogonales sont fonctions de

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Considérons maintenant une fonction F de deux séries de variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$; pour qu'elle reste invariable par une même substitution orthogonale effectuée sur les deux systèmes de variables, il faudra que

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_i; y_1.y_2,\ldots)\\ &\quad=\mathrm{F}(x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi,\ x_1\sin\varphi\\ &\quad-x_2\cos\varphi,\ldots,y_1\cos\varphi-y_2\sin\varphi,\ldots),\end{aligned}$$

ou que, en posant

$$\mathrm{F}_1=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1},\quad \mathrm{F}_2=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2},\quad \ldots,\quad \mathrm{F}'_1=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_1},\quad \mathrm{F}'_2=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_2},\quad \ldots,$$

on ait

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}_1(-x_1\sin\varphi-x_2\cos\varphi)+\mathrm{F}_2(x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi)\\ &\quad+\mathrm{F}'_1(-y_1\sin\varphi-y_2\cos\varphi)+\mathrm{F}'_2(y_1\cos\varphi-y_2\sin\varphi)=0,\end{aligned}$$

et pour $\varphi=0$

$$x_2\mathrm{F}_1-x_1\mathrm{F}_2+y_2\mathrm{F}'_1-y_1\mathrm{F}'_3=0,$$

ou

$$x_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_2}=0.$$

Pour intégrer cette équation on pose

$$\frac{dx_1}{x_2}=-\frac{dx_2}{x_1}=\frac{dy_1}{y_2}=-\frac{dy_2}{y_1};$$

les intégrales de ces équations sont

$$x_1^2+x_2^2=a,\qquad y_1^2+y_2^2=b,\qquad x_1y_1+x_2y_2=c;$$

on en conclut que F est fonction de $x_1^2+x_2^2, y_1^2+y_2^2$; $x_1y_1+x_2y_2$ et plus généralement F est fonction de

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,\quad y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

III. — Groupe symétrique.

J'appellerai *substitution symétrique* une substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ dans laquelle $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ et $\alpha_{ii}=\alpha_{jj}$, et par conséquent dont le déterminant est symétrique. Les substitutions symétriques de degré n forment évidemment un groupe.

L'équation caractéristique d'une substitution symétrique est une équation bien connue et qui a toutes ses racines réelles quand les α_{ij} sont réels. Les pivots étant désignés par $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}$; $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{n2}, \ldots$, la substitution $\Sigma\gamma_{ij}\,\tau_{ij}$ est orthogonale. Si l'on pose

$$\Gamma=\Sigma\pm\gamma_{11}\gamma_{22}\ldots\gamma_{nn},$$

on sait que

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{ji}},$$

et par suite les substitutions interpolaires de $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, seront données par les formules

$$\xi_p=\Sigma\tau_{ij}\gamma_{ip}\gamma_{pj}.$$

Toute substitution symétrique est évidemment un produit de facteurs de la forme λ et $1+\lambda(\tau_{ij}+\tau_{ji})$; une fonction invariable par les substitutions du groupe symétrique ne devra donc pas changer en multipliant ses variables par λ; elle devra donc être homogène de degré zéro ; on devra avoir en outre, en appelant $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; cette fonction,

$$f(x_1,\ldots,x_i+\lambda x_j,\ldots,x_j+\lambda x_i,\ldots)=f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots),$$

ou

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j + \frac{\partial f}{\partial x_j} x_i = 0, \qquad \ldots$$

et en général, en appelant P le symbole

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j + \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \mathrm{P},$$

$$\mathrm{P}f = 0, \qquad \mathrm{P}^2 f = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{P}_i f = 0, \qquad \ldots.$$

Si Pf est satisfaite, les autres formules le seront aussi; l'intégrale générale de (1) est

$$f = \mathrm{F}(x_i^2 - x_j^2);$$

on en conclut que les fonctions qui admettent le groupe symétrique sont des fonctions homogènes des différences $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 - x_3^2, \ldots, x_{n-1}^2 - x_n^2$.

IV. — Groupe cyclique.

J'appellerai *substitution cyclique* une substitution s qui, avec ses puissances, formera un groupe d'ordre fini. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on trouve, dans la suite $1, s, s^2, \ldots, s^\alpha, \ldots$, deux puissances égales : soit

$$s^\alpha = s^\beta \qquad \text{ou} \qquad s^\alpha - s^\beta = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$s^\beta(s^{\alpha-\beta} - 1) = 0.$$

Si nous excluons le cas où le déterminant de s est nul, s ne représentant pas une substitution proprement dite, nous trouvons

$$s^{\alpha-\beta} - 1 = 0;$$

donc toute substitution cyclique s satisfait à une équation binome

$$s^m - 1 = 0.$$

Proposons-nous de trouver les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admettant une pareille substitution. Soit f une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots x_n$ et (sf), $(s^2f)\ldots$, les valeurs que prend f quand on effectue sur les variables la substitution s, s^2, ..., c'est-à-dire quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12}, \ldots$; $x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22}, \ldots$; il est clair que la fonction

$$f + (sf) + (s^2f) + \ldots + (s^{n-1}f)$$

et en général toute fonction symétrique de f, (sf), ..., restera invariable par la substitution s.

Parmi les substitutions qui jouissent de la propriété de satisfaire à une équation binome, et qui ont ce que l'on appelle un *ordre fini*, il y a lieu de distinguer les substitutions de lettres. Ainsi, en particulier, la substitution circulaire

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1}$$

satisfait à l'équation $s^n - 1 = 0$.

V. — Groupe des puissances d'une substitution.

Proposons-nous de trouver les fonctions qui admettent une substitution linéaire donnée de degré n, et, par suite, ses puissances qui forment un groupe. Je suppose que la substitution en question s ait été mise sous la forme

$$s = s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \ldots + s_n\xi_n,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ désignant ses interpolaires et $s_1, s_2, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique; supposons que la substitution ξ_i change

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & a_{11}^{(i)} x_1 + a_{12}^{(i)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(i)} x_n, \\ x_2 & \text{en} & a_{21}^{(i)} x_1 + a_{22}^{(i)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(i)} x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

comme on a

$$s^r = s_1^r \xi_1 + s_2^r \xi_2 + \ldots + s_n^r \xi_n,$$

la substitution s^r changera

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & \sum\limits_i a_{11}^{(i)} s_i^r x_1 + \sum\limits_i a_{12}^{(i)} s_i^r x_2 + \ldots, \\ x_2 & \text{en} & \sum\limits_i a_{21}^{(i)} s_i^r x_1 + \sum\limits_i a_{22}^{(i)} s_i^r x_2 + \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En définitive, s^r change

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & s_1^r \mathrm{X}_{11} + s_2^r \mathrm{X}_{12} + \ldots + s_n^r \mathrm{X}_{1n} = x_1^{(r)}, \\ x_2 & \text{en} & s_1^r \mathrm{X}_{21} + s_2^r \mathrm{X}_{22} + \ldots + s_n^r \mathrm{X}_{2n} = x_2^{(r)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

X_{ij} désignant des fonctions linéaires bien déterminées.

Soit A_r une fonction linéaire de $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$, ...; la série dont le terme général est

$$\frac{1}{\mathrm{A}_r + \frac{1}{\mathrm{A}_r}}$$

sera évidemment convergente pour les valeurs des variables qui n'annulent pas $\mathrm{A}_r + \frac{1}{\mathrm{A}_r}$, si tous les s ne sont pas de module égal à un et sa valeur sera une des formes de la fonction cherchée.

Autrement : la substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ peut se mettre sous une forme remarquable; en effet, elle permet d'exprimer les nouvelles variables en fonction des anciennes, au moyen des formules

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n,$$
$$y_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou en appelant s_1, s_2, ... les racines supposées inégales de l'équation caractéristique

$$y_1 - s_1 x_1 = (\alpha_{11} - s_1) x_1 + \qquad \alpha_{12} x_2 + \ldots,$$
$$y_2 - s_1 x_2 = \qquad \alpha_{21} x_1 + (\alpha_{22} - s_1) x_1 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on tire de là

$$(y_1 - s_1 x_1) \frac{\partial A}{\partial(\alpha_{11} - s)} + (y_2 - s_1 x_2) \frac{\partial A}{\partial \alpha_{12}} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

A désignant le premier membre de l'équation caractéristique. Mais, en appelant

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

les pivots, ces équations reviennent à

$$(y_1 - s_1 x_1) x_{11} + (y_2 - s_1 x_2) x_{12} + \ldots + (y_n - s_1 x_n) x_{1n} = 0,$$
$$(y_1 - s_2 x_1) x_{21} + (y_2 - s_1 x_2) x_{22} + \ldots + (y_n - s_2 x_n) x_{2n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit alors $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ une fonction admettant la substitution s; on peut, au moyen d'un changement de variables, la mettre sous la forme

$$f(y_1 x_{11} + y_2 x_{12} + \ldots, y_1 x_{21} + y_2 x_{22} + \ldots, \ldots),$$

ou

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

et si l'on suppose

$$X_i = x_1 x_{i1} + x_2 x_{i2} + \ldots + x_n x_{in},$$

on devra avoir

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = f(s_1 X_1, s_2 X_2, \ldots, s_n X_n).$$

Ainsi le problème est ramené à trouver une fonction admettant la substitution

$$Y_1 = s_1 X_1, \qquad Y_2 = s_2 X_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = s_n X_n,$$

ce qui revient à dire que, si l'on pose

$$Z_i = \log Y_i,$$

la nouvelle fonction admettra la substitution qui change

$$Z_i \quad \text{en} \quad Z_i + \log s_i,$$

et qu'elle sera périodique : elle admettra en effet les périodes

$$\begin{array}{ccccc}
2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\
0, & 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & \ldots, & 0, \\
.., & \ldots\ldots, & .., & \ldots, & ..
\end{array}$$

En outre, quand on augmentera x_1 de $\log \operatorname{mod} s_1$, x_2 de $\log \operatorname{mod} s_2$, etc., elle ne changera pas de valeur, mais cela ne constitue qu'un seul système de périodes; la fonction transformée possède donc seulement $n+1$ systèmes de périodes simultanées.

On peut généraliser les considérations précédentes en se proposant de trouver une fonction admettant un groupe de substitutions permutables entre elles. Ces substitutions ont un même système de pivots et, en effectuant sur la fonction un changement de variables analogue à celui que nous venons de faire, les substitutions que la fonction admettra seront de la forme

$$Y_1 = s_1^\alpha t_1^\beta \ldots X_1, \qquad Y_2 = s_2^\alpha t_2^\beta \ldots X_2, \qquad \ldots,$$

et en posant

$$Z_i = \log Y_i,$$

la fonction transformée admettra les périodes simultanées

$$\begin{array}{ccccc} 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ \ldots\ldots, & ., & ., & \ldots, & ., \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2\pi\sqrt{-1}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \log\operatorname{mod} s_1, & \log\operatorname{mod} s_2, & \ldots, \\ \log\operatorname{mod} t_1, & \log\operatorname{mod} t_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{array}$$

Toutes les substitutions échangeables à une substitution donnée se ramènent à des fonctions linéaires et homogènes de n d'entre elles. La fonction qui admet un groupe dérivé de n substitutions échangeables aura pour transformée une fonction à $2n$ périodes.

Si l'on considère toutes les fonctions à n variables, sans points essentiels et possédant $2n$ périodes (et l'on sait que ces périodes ne sont pas arbitraires), toutes ces fonctions seront liées algébriquement à n d'entre elles.

Cela posé, soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction admettant $n-1$ substitutions échangeables à une substitution donnée; supposons sa transformée $2n$ fois périodique sans points essentiels. Soit

$$Pf = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right) f;$$

il est aisé de voir que Pf, P^2f, ... admettent les mêmes substitutions que f; donc f, Pf, ..., $P^n f$ sont liées entre elles par une équation algébrique. D'ailleurs, une équation

$$F(f, P^2f, P^3f, \ldots) = 0$$

est invariable quand on fait subir à x_1, x_2, ... une substitution linéaire.

VI. — Groupe des substitutions à coefficients entiers.

Les substitutions à coefficients entiers forment évidemment un groupe ; les facteurs primaires de ces substitutions sont de la forme $1 + \tau_{ij}$, si nous faisons abstraction des substitutions de la forme λ où λ est un nombre. Si l'on considère la série dont le terme général est

$$\frac{1}{(1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^{n+1}},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant tous les entiers possibles, cette série sera convergente, car l'intégrale

$$\int\int\int_0^\infty \cdots \frac{d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n}{(1 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^{n+1}}$$

est finie, excepté pour des valeurs particulières de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; de plus, il est facile de voir que, par une substitution de la forme $1 + \tau_{ij}$, elle ne change pas de valeur.

Considérant, en particulier, le cas où $n = 2$, il donne la série double

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \dfrac{1}{1} & + & \dfrac{1}{(1+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2y)^3} & \cdots, \\
\cdots & \dfrac{1}{(1+x)^3} & + & \dfrac{1}{(1+x+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+x+2y)^3} & \cdots, \\
\cdots & \dfrac{1}{(1+2x)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2x+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2x+2y)^3} & \cdots. \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

VII. — Essai de généralisation.

Le problème le plus général que l'on puisse se poser sur la théorie des substitutions linéaires est le suivant :

Étant données deux ou plusieurs substitutions, existe-t-il une fonction admettant ces substitutions ?

D'abord, il est facile de voir qu'il n'existe pas de fonction admettant toutes les substitutions que l'on peut faire avec ses variables, car elle devrait admettre la substitution $1 + \lambda\tau_{ij}$, c'est-à-dire rester invariable quand on change x_i en $x_i + \lambda x_j$, quel que soit λ ; on devrait donc avoir, en appelant f cette fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

et, par suite, f serait constant.

En général, pour qu'une fonction f admette un groupe G de substitutions linéaires, il faut que ce groupe G ne contienne pas de substitution infinitésimale, c'est-à-dire de la forme $1 + \varepsilon$, ε désignant une substitution dont tous les éléments sont infiniment petits. En effet, si f admettait une pareille substitution, on aurait

$$f(x_1, x_2, \ldots) = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots),$$

les quantités δx_1, δx_2, ... désignant des fonctions linéaires des x à coefficients infiniment petits. On devrait donc avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0,$$

quels que soient x_1, x_2, ..., x_n et, par suite, quels que soient δx_1, δx_2, ..., on devrait donc avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \text{où} \qquad f = \text{const.}$$

Cette conclusion suppose, bien entendu, que f ne possède pas une infinité de valeurs pour chaque système de valeurs des variables.

La première question à résoudre est donc celle-ci :

Étant données deux ou plusieurs substitutions, reconnaître si le groupe qui en dérive présente des substitutions innfiitésimales.

Dans le cas où le groupe considéré ne contient pas de substitutions infinitésimales, en appelant s_1, s_2, ... ses substitutions, il faudra voir s'il existe une fonction $\psi(x_1, x_2, \ldots)$, telle que

$$\Sigma\, \psi(s_i x_1, s_i x_2, \ldots) \tag{1}$$

représente une série convergente, $s_i x_p$ désignant le résultat de la substitution s_i effectuée sur x_p. Si une pareille fonction existe, la série (1) représentera une fonction admettant les substitutions du groupe.

Ce premier problème présente déjà de grandes difficultés que je n'ai pas la prétention de lever entièrement, mais dont il est facile de préciser l'ordre. Nous avons vu, en effet, que toutes les substitutions de degré x étaient des fonctions entières de deux autres $s = \Sigma \varepsilon_i \tau_{ii}$ et $t = \tau_{12} + \tau_{23} \ldots + \tau_{n1}$, jouissant de ces propriétés fondamentales,

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts.$$

L'expression générale des substitutions d'un groupe peut donc être obtenue sous forme d'un polynome entier en s et t de degré $n - 1$ par rapport à chacune des substitutions s et t. Ainsi la solution du premier problème dépend d'un calcul purement algébrique et essentiellement élémentaire, ce qui ne veut pas dire facile à effectuer dans le cas général.

A côté du problème général dont nous venons de parler, viennent se placer d'autres problèmes aussi généraux, mais souvent plus faciles à résoudre, tel que celui-ci :

Étant donnés plusieurs systèmes de n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $\ldots$, on effectue sur ces systèmes une même substitution linéaire. Quelles sont les fonctions de toutes ces variables qui restent invariables quand on effectue cette substitution?

SUR LES PROGRESSIONS DES DIVERS ORDRES.

Cauchy appelle *progression arithmétique d'ordre p* une série limitée ou illimitée dont le terme de rang n est une fonction entière de degré p, et *progression géométrique d'ordre n* une série dont le terme général est de la forme $e^{\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ étant une fonction entière de degré p.

Considérons une progression géométrique d'ordre p de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{x_1\varphi_1+x_2\varphi_2+\ldots+x_n\varphi_n+\varphi_0},$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ désignant des fonctions entières d'ordre p de ν. Une fonction telle que f n'existera pas, bien entendu, pour toutes les valeurs de ses variables, car il faut que certaines conditions de convergence soient satisfaites. Laissons pour un moment ces conditions de convergence de côté et supposons-les satisfaites; effectuons la substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

le terme général de la série f a pour nouvel exposant

$$(x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}+\ldots)\varphi_1+(x_1\alpha_{21}+x_2\alpha_{22}+\ldots)\varphi_2+\ldots+\varphi_0;$$

le terme de rang $\nu+1$ avant la substitution avait pour exposant :

$$x_1\varphi_1(\nu+1)+x_2\varphi_2(\nu+1)+\ldots+\varphi_0(\nu+1);$$

la différence de ces exposants est un polynome de degré p en ν qui sera indépendant de ν. Si l'on annule les coefficients de $\nu, \nu^2, \ldots, \nu^p$, ces coefficients sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et pour qu'ils soient nuls il faut que les coefficients des x le soient eux-mêmes. On aura ainsi pn équations pour déterminer les n^2 quantités α_{ij} et les $n(p+1)$ coefficients des φ. Il en résulte qu'en général il y aura des fonctions qui seront multipliées par une exponentielle de la forme e^{L}, où L est une fonction linéaire des x, quand on effectuera sur les variables une substitution linéaire donnée, et même plusieurs substitutions linéaires; et ces fonctions seront représentées par des progressions géométriques.

Nous examinerons en détail un cas simple, celui où les fonctions φ sont du second degré. Nous poserons

$$\varphi_i=a_i\nu^2+b_i\nu+c_i$$

et nous poserons toujours

$$f=\Sigma\, e^{x_1\varphi_1+\ldots+x_n\varphi_n+\varphi_0};$$

après la substitution, le terme de rang n devient

$$\begin{aligned}&(x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}\ldots)(a_1\nu^2+b_1\nu+c_1)\\&\quad+(x_1\alpha_{21}+x_2\alpha_{22}\ldots)(a_2\nu^2+b_2\nu+c_2)+\ldots;\end{aligned}$$

le terme de rang $\nu+1$ était

$$x_1[a_1(\nu+1)^2+b_1(\nu+1)+c_1]+x_2[a_2(\nu+1)^2+\ldots]+\ldots,$$

la différence des termes indépendants de ν est de la forme

$$\left.\begin{array}{r} c_1(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots)+c_2(\alpha_{21}x_1+\ldots)+\ldots \\ -x_1(a_1+b_1+c_1)-x_2(a_2+b_2+c_2)-\ldots \end{array}\right\}$$

et il faut poser

$$\left.\begin{array}{l} (x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}+\ldots)a_1+(x_1\alpha_{21}+x_2\alpha_{22}+\ldots)a_2+\ldots \\ \quad -a_1x_1-a_2x_2-\ldots \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}+\ldots)b_1+(x_1\alpha_{21}+\ldots)b_2+\ldots \\ \quad -x_1(2a_1+b_1)\,x_2(2a_2+b_2)-\ldots \end{array}\right\}=0;$$

ces équations donnent

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11}-1)a_1+\alpha_{21}a_2+\ldots+\alpha_{2n}a_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{1n}a_1+a_{2n}a_2+\ldots+(\alpha_{nn}-1)a_n=0, \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11}-1)\,b_1-\alpha_{21}b_2+\ldots+\alpha_{2n}c_n=2a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{12}b_1+\alpha_{2n}b_2+\ldots+(\alpha_{nn}-1)s_n=2a_n. \end{array}\right.$$

Ces $2n$ équations laissent n^2-2n des α arbitraires; la fonction f se trouvera alors multipliée par des exponentielles e^{l_1}, e^{l_2}, ... où l_1, l_2, ... seront des fonctions linéaires quand on effectuera certaines substitutions sur les variables.

Pour que la fonction f existe il faut que la série qui la définit soit convergente; or, dans cette série, le rapport d'un terme au précédent est

$$e^{\Sigma(2a_i\nu+a_i+b_i)x_i}$$

et si la partie réelle de $\Sigma(2a_i\nu\pm a_i\pm b_i)x_i$ reste négative pour $\nu=+\infty$ la série sera convergente : la fonction f n'existera donc pas pour toutes les valeurs des variables.

La considération des fonctions que nous venons de trouver peut conduire, par de simples divisions, à des fonctions admettant une substitution donnée.