Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 143-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__143_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1560 ([1]).

(1885, p. 536).

Trouver le rayon d'un cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont

$$(-a,\ b,\ c),\ (a,\ -b,\ c),\ (a,\ b,\ -c).$$

(HANUMENTA RAU.)

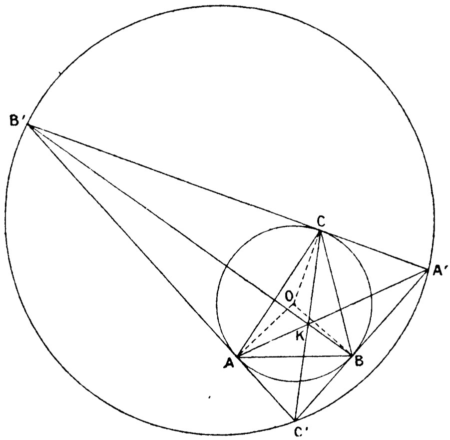
SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Le cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont $(-a, b, c)$ $(a, -b, c)$ $(a, b, -c)$ est le cercle

[1] *Voir* 1891, p. 39, une solution de M. BARISIEN.

circonscrit au triangle A'B'C', polaire du triangle ABC, car les sommets A', B', C sont les points associés du point de



Lemoine K, ayant des coordonnées proportionnelles à a, b, c.

Soient donc a', b', c' les côtés du triangle A'B'C', sa surface sera $\frac{R}{2}(a'+b'+c')$, R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Si ρ est le rayon du cercle circonscrit au triangle A'B'C', on aura

$$\rho = \frac{a'b'c'}{2R(a'+b'+c')}. \tag{1}$$

Mais

$$a' = AC' + AB' = R(\tang C + \tang B) = R\frac{\sin A}{\cos B \cos C},$$

$$b' = BC' + BA' = R(\tang C + \tang A) = R\frac{\sin B}{\cos A \cos C},$$

$$c' = CA' + CB' = R(\tang A + \tang B) = R\frac{\sin C}{\cos A \cos B}.$$

Alors l'égalité (1) devient

$$\rho = \frac{R^3 \sin A \sin B \sin C}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \times \frac{1}{4R^2(\tang A + \tang B + \tang C)}.$$

Remarquant que, dans un triangle,

$$\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\cos A . \cos B . \cos C},$$

la valeur du rayon ρ se réduit à

$$\frac{R}{4 \cos A \cos B \cos C}.$$

Question 1684.

(1894, p. 5*)

Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux sommets d'un triangle à toute conique conjuguée par rapport à ce triangle et passant en outre par un point fixe est une quartique trinodale. (A. CAZAMIAN).

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soient B et C les deux sommets considérés du triangle, P et Q les points d'intersection d'une des coniques avec BC. Les droites AP et AQ sont donc tangentes à cette dernière. Effectuons maintenant une transformation homographique de manière que les points B et C coïncident avec les ombilics du plan. a, le transformé du point A, deviendra le centre de la conique transformée; ap et aq étant conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes seront orthogonales; donc aussi les asymptotes de la conique transformée, qui sera une hyperbole équilatère. Le problème revient donc à chercher le lieu des foyers des hyperboles équilatères concentriques passant par un point fixe. Ce lieu, qu'on obtient sans difficulté, est une lemniscate ayant son point double inflexionnel en a. La lemniscate étant une quartique bi-circulaire, en revenant au problème primitif on trouve pour le lieu une quartique trinodale, les nœuds coïncidant avec les sommets du triangle.

Autre solution de M. H. LEZ.

Question 1698.

(1895, p. 38*.)

On considère le triangle formé par un point M *d'une ellipse, le pôle de la normale en* M *et le centre de l'ellipse.*

On considère en outre le rectangle formé par le point M, *le centre de l'ellipse et les projections de ce centre sur la tangente et la normale en* M.

Quel que soit le point M *sur l'ellipse, le produit des aires du triangle et du rectangle est constant.*

(E.-N. Barisien).

SOLUTION

par M. H. A. Droz-Farny.

Soient $x' = a\cos\varphi$, $y' = b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point M de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. La tangente et la normale en M ont respectivement pour équations $bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab$ et $ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi$.

On trouve aisément, pour les coordonnées du pôle P de la normale,

$$x'' = \frac{a^3}{c^2\cos\varphi}, \qquad y'' = \frac{-b^3}{c^2\sin\varphi},$$

donc

$$\text{deux triangles OMP} = 2\text{S} = x'y'' - y'x'' = \frac{ab}{c^2}\,\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$\text{distance du centre à la tangente } d = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\text{distance du centre à la normale } d' = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$\text{rectangle indiqué R} = dd' = \frac{abc^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

$$\text{et par conséquent : RS} = \frac{a^2b^2}{2} = \text{constante.}$$

M. Mannheim fait remarquer que la question 1698 peut être résolue géométriquement de la manière suivante :

Sur la tangente en M à l'ellipse prenons le pôle P de la normale en M et projetons en T le centre O de l'ellipse.

L'aire du rectangle est égale à MT × OT. Le double de l'aire du triangle OMP est égal à MP × OT. Le produit de ces aires est $\overline{\text{OT}}^2 \times \text{MP} \times \text{MT}$.

La droite OT étant parallèle à la normale en M est le diamètre conjugué de OP. Le produit $MP \times MT$ est alors égal au carré du demi-diamètre conjugué de OM. On sait que le produit de ce carré par $\overline{OT}^2$ est constant quel que soit M; donc, etc.

Questions 1758 et 1759.

(1897, p. 100) (1).

REMARQUES

Par M. Canon.

A la page 181 de son Ouvrage de *Géométrie cinématique*, M. Mannheim démontre que *lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères fixes dont les centres sont dans un même plan, un point quelconque de la droite décrit une ligne qui appartient à une sphère dont le centre est aussi sur ce plan.*

Cet énoncé n'est autre que celui de la question proposée sous le n° 1758. M. Mannheim ajoute que *les centres des sphères, qui contiennent les lignes ainsi décrites, appartiennent à une conique.*

A la page 105 du même Ouvrage, M. Mannheim, étudiant les propriétés relatives au déplacement d'une figure de grandeur invariable démontre que *lorsque des plans sont parallèles à une droite* D, *les plans normaux à chacun d'eux, menés respectivement par leurs caractéristiques, passent par une même droite* L, *qui est l'adjointe au plan perpendiculaire à* D. et il ajoute plus loin (p. 108) qu'*une adjointe à un plan est toujours parallèle à l'axe du déplacement.*

Cet énoncé n'est autre que celui de la question proposée sous le n° 1759.

M. Mannheim donne cette conséquence : *Les caractéristiques des plans d'un faisceau mobile appartiennent à un hyperboloïde dont les plans des sections circulaires sont perpendiculaires les uns à l'arête du faisceau et les autres à l'adjointe au plan perpendiculaire à cette arête, c'est-à-dire à l'axe du déplacement.*

---

(1) *Voir* les énoncés, *loc. cit.*