Nouvelles annales de mathématiques

Exercices préparatoires à la licence et à l'agrégation

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 99-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__99_0>

EXERCICES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Licence ès Sciences mathématiques.

Application du Calcul infinitésimal à la Géométrie. — On donne le cylindre défini par les équations

$$x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = v,$$

où u et v sont des variables indépendantes; à chaque point M de ce cylindre, on fait correspondre une sphère ayant pour centre ce point M et pour rayon une fonction donnée $\rho(u, v)$ des deux variables.

1° Déterminer les deux points caractéristiques de chaque sphère;

2° A quelle condition doit être assujettie la fonction ρ pour que les deux points caractéristiques d'une sphère quelconque soient confondus en un même point?

3° On joint ce point au centre de la sphère correspondante; on obtient ainsi une congruence de droites. Déterminer les courbes situées sur le cylindre et dont chaque tangente appartient à la congruence précédente.

Agrégation des Sciences mathématiques.

Analyse. — I. On considère la parabole $y^2 = 4x$ et la podaire de cette courbe par rapport au point $x = \alpha$, $y = 2$.

1° Trouver, en appliquant le théorème d'Abel et sous forme réelle, les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois points de la podaire soient en ligne droite.

Déterminer les points d'inflexion, et étudier la réalité de ces points.

2° Trouver la condition pour que six points de la podaire soient sur une même conique; déterminer les points où la conique osculatrice a un contact du cinquième ordre; déterminer les systèmes de coniques osculatrices en deux points.

Discuter les problèmes précédents en examinant les différentes valeurs de α.

II. On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2+4y^2-8)^3-16x^2y^2(x^2+4y^2-6)=0.$$

1° Construire la courbe et déterminer son genre.

2° Démontrer que le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour que $6q$ points de C soient sur une même courbe C_q d'ordre q ne passant par aucun point singulier est inférieur à 10 si q est plus petit que 4, et égal à 10 si q est égal ou supérieur à 4. Chercher ces conditions.

3° Examiner le cas où la courbe C_q passe par un ou plusieurs points singuliers.

4° Par $6q-\lambda\mu$ points non singuliers donnés sur la courbe C, faire passer une courbe C_q de degré $q>3$ qui ait en λ points à déterminer un contact d'ordre $\mu-1$ avec la courbe C, μ points d'intersection étant confondus en chacun des λ points à trouver.

Examiner successivement les trois cas $\lambda>10$, $\lambda=10$, $\lambda<10$.

Dans les deux premiers cas, $\lambda \geqq 10$, on démontrera que, si par les $6q - \lambda\mu$ points donnés et par les $\lambda(\mu - 1)$ points de contact de $\mu - 1$ courbes solutions, on fait passer une courbe de degré q, les λ autres points où elle rencontre la courbe proposée sont aussi sur une courbe solution.

5° Trouver une cubique qui, en tout point où elle rencontre la courbe C, ait avec elle un contact du premier ordre.

Problème d'élémentaires. — On considère un cercle fixe et les triangles ABC conjugués par rapport à ce cercle.

1° Démontrer que le cercle circonscrit à ces triangles et les cercles des neuf points sont orthogonaux à des cercles fixes.

2° On suppose que les côtés AC et AB passent respectivement par des points fixes B_1 et C_1; déterminer le lieu du sommet A; discuter la nature de ce lieu lorsque, l'un des points B_1 ou C_1 restant fixe, l'autre varie d'une manière quelconque dans le plan.

3° On considère le cas particulier où les points B_1 et C_1 sont situés sur une même tangente au cercle donné; démontrer que le triangle ABC reste circonscrit à un triangle T_1 et inscrit dans un autre triangle T_2, et de plus qu'il est homologique à chacun de ces triangles. Déterminer le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie du triangle ABC et de chacun des triangles T_1 et T_2.

Problème de spéciales. — On donne un ellipsoïde E et une sphère S de centre ω; on considère un plan variable P assujetti à cette condition que son pôle p par rapport à S soit situé sur son diamètre par rapport à E.

1° Lieu du pôle p du plan P, et enveloppe de ce plan.

2° Démontrer que la courbe C, lieu du point p, passe par les sommets du tétraèdre conjugué commun à l'ellipsoïde et à la sphère; réciproquement, tout point de cette courbe est le sommet d'un tétraèdre conjugué à l'ellipsoïde et à une sphère S' de centre ω et de rayon convenablement choisi.

3° On fait varier le centre ω de la sphère S sur une droite Δ, et l'on choisit de plus le rayon de cette surface de façon qu'elle passe par le centre de l'ellipsoïde; déterminer la surface Σ lieu de la courbe C et l'enveloppe du plan P. Pour quelles positions de la droite Δ la surface Σ est-elle de révolution?

4° On considère un point M et les plans polaires de ce point par rapport à toutes les quadriques passant par la courbe C relative à une sphère fixe S; démontrer qu'ils passent par un même point M'; déterminer le lieu de ce point M' lorsque M décrit une droite D.

5° On suppose, en particulier, que la droite D passe par le centre de l'ellipsoïde et est située dans le plan osculateur de la courbe C en ce point; montrer que le lieu de M' est une droite D', et trouver le lieu de cette dernière droite lorsque D varie en satisfaisant aux conditions indiquées précédemment.